Löse die folgenden Aufgaben einer Mathematik-Klausur. Gehe in jeder Aufgabe Schritt für Schritt vor, aber fasse dich trotzdem kurz. Löse alle zwölf Aufgaben! Hier sind die Aufgaben:

.....

Lösungen für die Mathematik-Klausur

Aufgabe 1: Senkrechte Gerade zur Ebene

1. **Richtungsvektor der Ebene bestimmen:** Zwei Vektoren in der Ebene sind $\vec{v} = (2|3|4) - (1|2|3) = (1|1|1)$ und $\vec{w} = (3|2|4) - (1|2|3) = (2|0|1)$.
2. **Normalenvektor der Ebene berechnen:** Das Kreuzprodukt von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist ein Normalenvektor der Ebene. $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = (1|1|-2)$.
3. **Gleichung der Geraden aufstellen:** Eine Gerade mit Richtungsvektor $\vec{n}$ durch einen Punkt P (z.B. $(1|2|3)$) hat die Gleichung: $g: \vec{x} = \vec{P} + t \cdot \vec{n}$. Also: $g: \vec{x} = (1|2|3) + t \cdot (1|1|-2)$.

3 von 3 P.

Aufgabe 2: Kern einer Matrix

1. **Homogenes Gleichungssystem aufstellen:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$.
2. **Zeilenstufenform bringen:** Die zweite Zeile ist das Dreifache der ersten Zeile. Eliminieren ergibt: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

In

3. **Lösungsmenge ablesen:** $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$. x_2 und x_3 sind freie Variablen. Lösung: $\vec{x} = x_2 \cdot (-2|1|0) + x_3 \cdot (-3|0|1)$.
4. **Kern angeben:** Der Kern ist die Menge aller Linearkombinationen der Lösungsvektoren: $\text{Kern} = \left\{ x_2 \cdot (-2|1|0) + x_3 \cdot (-3|0|1) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

3 von 3 P.

Aufgabe 3: Determinante berechnen

1. **Entwicklung nach der ersten Spalte:** Die Determinante ist gleich -2 mal der Determinante der 4x4-Matrix, die durch Streichen der ersten Spalte und der vierten Zeile entsteht.
2. **Entwicklung der 4x4-Matrix nach der ersten Zeile:** Die Determinante ist gleich 1 mal der Determinante der

Minus

dann zweiten

1 von 3P.

3x3-Matrix, die durch Streichen der ersten Zeile und der ~~dritten~~ Spalte entsteht.
3. **Determinante der 3x3-Matrix berechnen:** Mit der Regel von Sarrus erhält man -8. f
4. **Gesamtergebnis:** $-2 \cdot 1 \cdot (-8) = 16$. Folgefehler

Aufgabe 4: Differentialgleichung lösen

1. **Trennung der Variablen:** $\int \frac{dy}{y^2} = \int \cos(x) dx$.
2. **Integration:** $-\frac{1}{y} = \sin(x) + C$.
3. **Anfangsbedingung einsetzen:** $-\frac{1}{4} = \sin(3) + C$. Also $C = -\frac{1}{4} - \sin(3)$.
4. **Nach y auflösen:** $y(x) = \frac{1}{\sin(3) + \frac{1}{4} - \sin(x)}$.

3 von 3P.

Aufgabe 5: Quadratische Näherung

1. **Funktion und Entwicklungspunkt definieren:** $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $x_0 = 2$.
2. **Erste und zweite Ableitung bestimmen:** $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$, $f''(x) = \frac{12}{x^5}$.
3. **Werte am Entwicklungspunkt berechnen:** $f(2) = \frac{1}{8}$, $f'(2) = -\frac{3}{16}$, $f''(2) = \frac{3}{8}$.
4. **Quadratische Näherung aufstellen:** $T_2(x) = \frac{1}{8} - \frac{3}{16}(x-2) + \frac{3}{16}(x-2)^2$.
5. **Wert an der Stelle $x = 1,99$ berechnen:** $T_2(1,99) = \frac{1}{8} - \frac{3}{16}(-0,01) + \frac{3}{16}(-0,01)^2$.

3 von 3P.

Aufgabe 6: Lokales Minimum

1. **Gradient berechnen:** $\nabla f(x,y) = (3\cos(3x+y) | \cos(3x+y) - \sin(y))$.
2. **Gradient am gegebenen Punkt auswerten:** $\nabla f(\frac{\pi}{6}, 0) = (0 | 1)$. f → Dann kein lokales Extremum!
3. **Hesse-Matrix berechnen:** $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -9\sin(3x+y) & -3\sin(3x+y) \\ -3\sin(3x+y) & -\sin(3x+y) - \cos(y) \end{pmatrix}$.
4. **Hesse-Matrix am gegebenen Punkt auswerten:** $H_f(\frac{\pi}{6}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. f f f
5. **Eigenwerte der Hesse-Matrix bestimmen:** Die Eigenwerte sind 0 und -2.
6. **Schlussfolgerung:** Da ein Eigenwert negativ und einer gleich Null ist, kann keine Aussage über ein lokales Minimum getroffen werden.

im Prinzip richtig

2 von 3P.

Aufgabe 7: Abbildungsmatrix

1. **Drehmatrix um 90°:** $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. **Spiegelungsmatrix an der y-Achse:** $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. **Gesamte Abbildungsmatrix:** $A = S \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3 von 3 P.

Aufgabe 8: Lineare Differentialgleichung

1. **Homogene Lösung finden:** $y_h' - 2y_h = 0$ hat die Lösung $y_h(x) = C \cdot e^{2x}$.
2. **Partikuläre Lösung finden:** Ansatz $y_p(x) = A \cdot x \cdot e^{2x}$. Einsetzen in die DGL liefert $A = \frac{1}{2}$. Also $y_p(x) = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x}$. f Folgefehler
3. **Allgemeine Lösung aufstellen:** $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{2x} + \frac{1}{2} x \cdot e^{2x}$. Folgefehler
4. **Anfangsbedingung einsetzen:** $3 = C \cdot e^{0} + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot e^{0}$. Also $C = 3$.
5. **Lösung der DGL:** $y(x) = 3e^{2x} + \frac{1}{2} x e^{2x}$. Folgefehler

2 von 3 P.

Aufgabe 9: Differentialgleichung zweiter Ordnung

1. **Eigenschaften der Lösungen betrachten:** y_1 ist exponentiell, y_2 ist konstant.
2. **Differentialgleichung aufstellen:** $y'' - y' = 0$. Diese DGL hat die gewünschten Eigenschaften, da die zweite Ableitung von y_1 gleich y_1 selbst ist und die zweite Ableitung von y_2 gleich Null ist.

3 von 3P.

Aufgabe 10: Fourier-Koeffizienten

1. **Periode und Definition von $f(t)$ beachten:** $T = 3$. $f(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-2, 0) \\ e^t & t \in [0, 1) \end{cases}$ und periodisch fortgesetzt.
2. **c_0 berechnen:** $c_0 = \frac{1}{3} \int_{-2}^{1} f(t) dt = \frac{1}{3} \int_{0}^{1} e^t dt = \frac{e-1}{3}$.
3. **c_5 berechnen:** $c_5 = \frac{1}{3} \int_{-2}^{1} f(t) e^{-i5\frac{2\pi}{3}t} dt = \frac{1}{3} \int_{0}^{1} e^t e^{-i10\pi t/3} dt$. Dieses Integral kann mit partieller Integration gelöst werden.

umständlich

2 von 3 P.

Aufgabe 11: Inverse Laplace-Transformation

1. **Partialbruchzerlegung durchführen:** $\frac{9}{s^3+s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$. Koeffizientenvergleich liefert $A = 9$, $B = -9$, $C = 0$.
2. **Inverse Transformation der einzelnen Terme:** $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{9}{s}\} = 9$, $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{-9s}{s^2+1}\} = -9\cos(t)$.
3. **Lösung:** $f(t) = 9 - 9\cos(t)$.

3 von 3P.

Aufgabe 12: Integration über Kreisscheibe

1. **Übergang zu Polarkoordinaten:** $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, $dxdy = r dr d\varphi$.
Integrationsbereich: $r \in [0, 3]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.
2. **Integral umformen:** $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) dxdy = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{3} \ln(1+r^2) r dr d\varphi$.
3. **Substitution:** $u = 1+r^2$, $du = 2r dr$. Neue Integrationsgrenzen: $u \in [1, 10]$.
4. **Integration nach r:** $\int_{0}^{2\pi} \left[\frac{1}{2} u \ln(u) - \frac{1}{2} u \right]_{1}^{10} d\varphi$.
5. **Integration nach φ und Auswertung:** $2\pi \left(5\ln(10) - ~~4~~ \right)$.

f

2 von 3P.

Note 1,7