Kurven V-1

Notiztitel 12.11.2007

(B-Splines vom letzten Mal)
(Demo mit Cinema 4D)

Implizite Kurven

andere Bezeichnungen:
Isolinien, Äquipotenziallinien,
Level Sets

	Gerade	Kurve
parametrisiert	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+t^2 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$
implizit	$4x + 5y = 13$	$x^3 - \cos(y) = 8$

$f(x,y) = \text{const.}$

parametrisiert: • geht im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$
• gut zum Zeichnen
• schlecht zum Prüfen, ob Punkt auf Kurve

implizit: • geht **nur** im $\mathbb{R}^2$
• schlecht zum Zeichnen
• gut zum Prüfen ob Punkt auf Kurve
• Kein Ärger damit, eine Parametrisierung zu finden
$\rightarrow$ reale Objekte

<u>Beispiele</u>

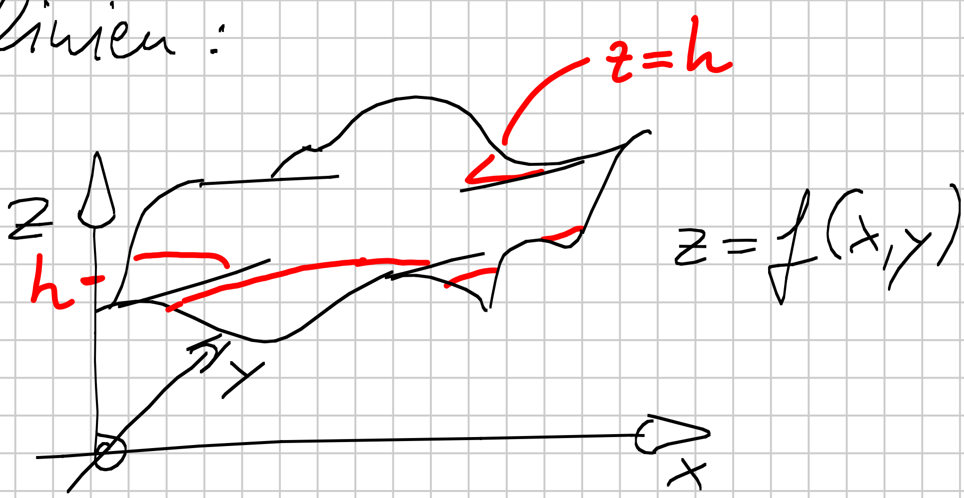
$x^2 + y^2 = 13^2$ Kreislinie

$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ Ellipsenlinie

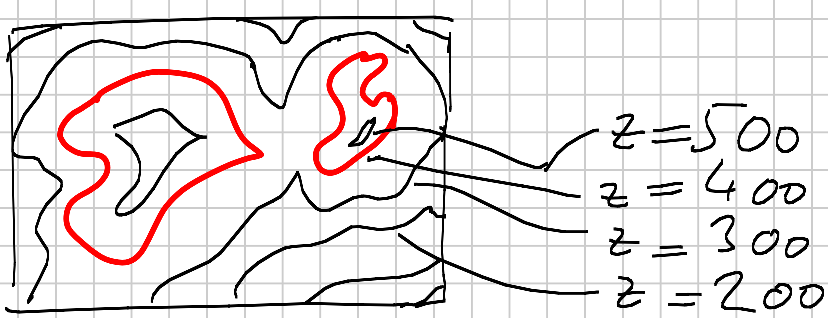
Es gehen nur geschlossene Kurven; oft gibt es mehrere unverbundene Teile.

Beispiele:
- $x^2 - y^2 = 1$
- $\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{1}{4}$

Leicht zu veranschaulichen als Höhenlinien:



Wie auf der Landkarte



Demos

- Kanten von s/w-Bild mit Weichzeichner und Gradationskurven säubern.
- Metaballs in Cinema 4D (implizite Flächen)

Richtungsvektor

Nehme an, wir wüssten eine Parametrisierung dieser (roten) Kurve, zumindest in der Umgebung des betrachteten Punkts.

Dann ist $f(\underbrace{\vec{p}(t+\Delta t)}_{\approx \begin{pmatrix} x+\Delta t\cdot v_x \\ y+\Delta t\cdot v_y \end{pmatrix}}) = c = f(\vec{p}(t))$.

wenn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{p}(t)$ und $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \vec{p}\,'(t)$.

Also $$0 = f\left(\begin{pmatrix} x+\Delta t\cdot v_x \\ y+\Delta t\cdot v_y \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} x+\Delta t\cdot v_x \\ y+\Delta t\cdot v_y \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} x+\Delta t\cdot v_x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$+ f\left(\begin{pmatrix} x+\Delta t\cdot v_x \\ y \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

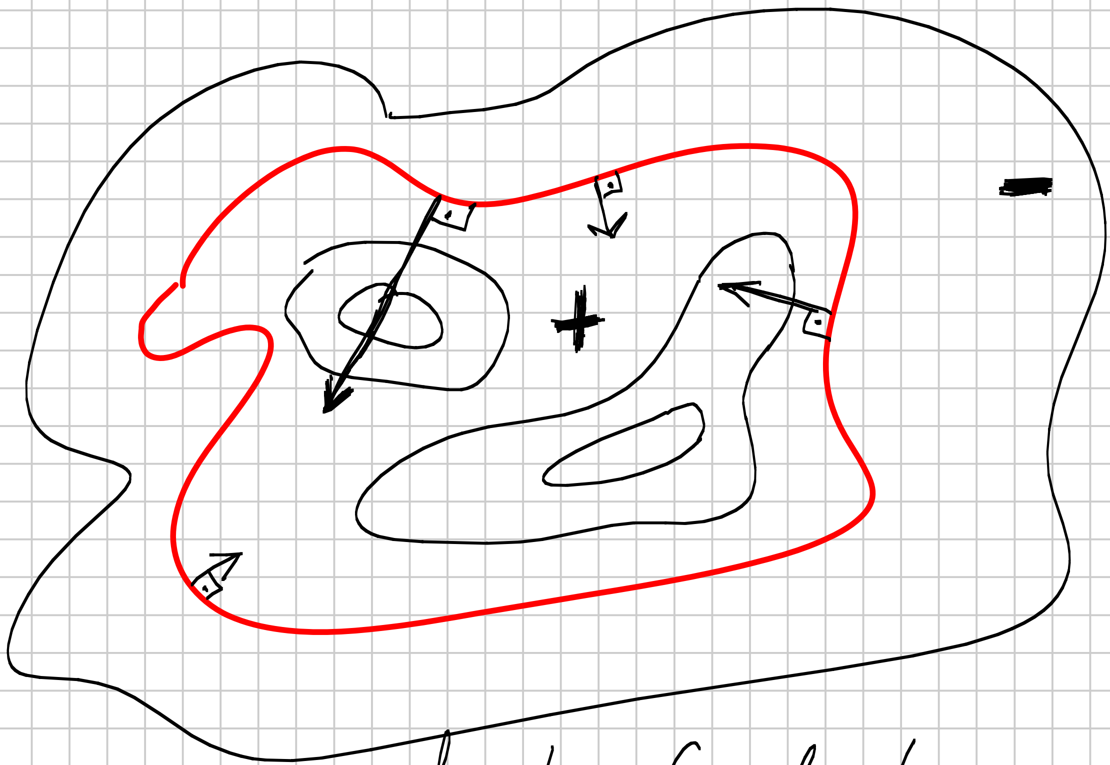
„partielle Ableitung" — nach x ableiten; y als Konstante

$$\approx \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \cdot \Delta t \cdot v_x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \cdot \Delta t \cdot v_y$$

$$= \Delta t \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \end{pmatrix}$$

„Gradient"

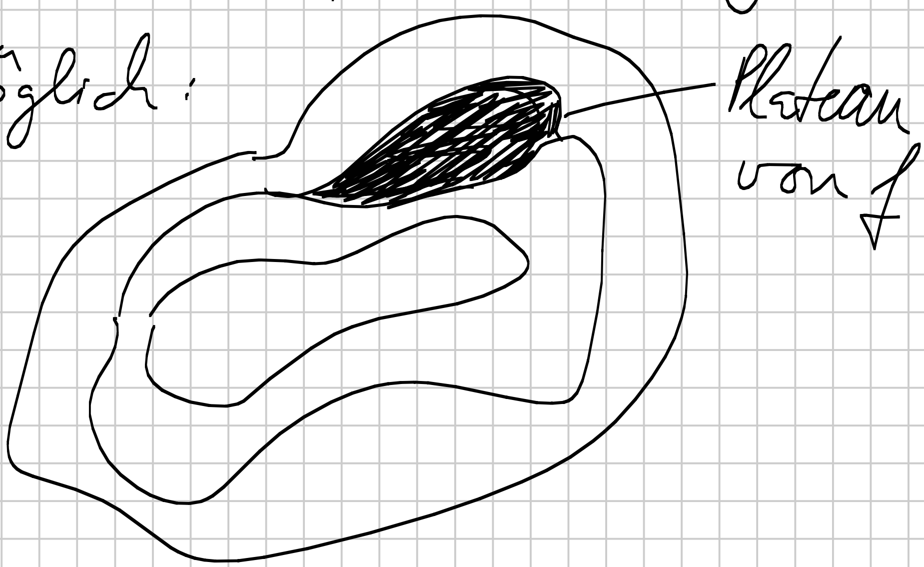
Also: Die Kurve verläuft senkrecht
zum Gradienten
(= Richtung des steilsten lokalen
Anstiegs).



eingezeichnet: Gradienten
an verschiedenen Stellen
auf der Kurve

Wenn man sicherstellen will, dass $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=c\}$ wirklich eine Kurve ist und nirgendwo ausläuft, kann man fordern, dass der Gradient von f überall auf dieser Menge $\neq \vec{0}$ ist.

Sonst möglich:



Marching Squares

Effizientes Zeichnen: Starte dicht an der Kurve. Prüfe benachbarte Gitterpunkte, ob $f(x,y)\geq c$. Zeichne Polylinie. Bestimme Stützpunkte linear aus $f(x,y)-c$.