Hausaufgaben - Blatt 6

(1) (a) Ermittle $(2+3i)+(1-i)$ zeichnerisch und rechnerisch.

(b) Berechne $(-3+2i)\cdot(2-i)$ und $\dfrac{1+7i}{2-i}$ und skizziere jeweils die Operanden und das Ergebnis in der komplexen Ebene.

(c) Berechne $(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i)^3$.

(2) Skizziere folgende Mengen in der komplexen Ebene:

$\{z\in\mathbb{C} : |z|=5\}$

$\{z\in\mathbb{C} : |z|=z\}$

$\{z\in\mathbb{C} : z^3=8\}$

$\{z\in\mathbb{C} : \arg(z)=30^o\}$

$\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im}(z)=\frac{1}{2}\}$

$\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re}(z)=-1\}$

(3) Jede kubische Gleichung lässt sich (durch eine geeignete Variablenverschiebung) in der Form

$$x^3+px+q=0$$

schreiben. Hierfür gilt die (erstmals im Jahre 1545 publizierte) *Lösungsformel von Cardano*:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\ .$$

Falls die Gleichung **genau eine** reelle Lösung hat, wird diese durch die Formel geliefert. Falls die Gleichung **drei** reelle Lösungen hat, liefert die Formel zunächst nur eine Summe aus zwei Kubikwurzeln komplexer Zahlen.

(a) Wende die Formel auf $x^3-15x-4=0$ an.

(b) Welche reelle Lösung erhält man, wenn man "zufällig" weiß, dass $(2+i)^3=2+11i$ ist? Wie lauten die beiden anderen Lösungen?

Anmerkungen:

- Dieses Beispiel stammt aus dem 1572 erschienenen Algebra-Lehrbuch von Rafael Bombelli, in dem erstmalig das formal korrekte Rechnen mit komplexen Zahlen gelehrt wurde.
- Im modernen Sinn liefert die Formel immer alle drei (reellen oder komplexen) Lösungen, sofern man die Mehrdeutigkeit komplexer Kubikwurzeln sauber berücksichtigt.