Komplexe Zahlen

Jörn Loviscach

Versionstand: 23. März 2009, 18:05

1 Zahlenbereiche

So wie heutzutage Betriebssysteme oder Web-Browser von Version zu Version mit immer weiteren Funktionen überhäuft werden, sind auch die Zahlenbereiche über die Jahrhunderte angewachsen.

Zum Zählen benötigt man die positiven natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ Mit Hilfe dieser Zahlen kann man schon die Gleichung $42 + x = 42$ nicht lösen. Dazu muss die Null eingeführt werden. In der Informatik zählt man die Null gerne zu den natürlichen Zahlen [natural numbers] $\mathbb{N}$, denken Sie zum Beispiel an den Typ `unsigned int` in C. In der Mathematik gehört die Null dagegen auch mal gerne nicht dazu. Ich schreibe deshalb sicherheitshalber $\mathbb{N}_0$ beziehungsweise $\mathbb{N}^+$, um klar zu machen, ob die Null dabei sein soll oder nicht. Vorsicht mit einen nackten Symbol $\mathbb{N}$ in Büchern und Artikeln!

Im nächsten Schritt stellt man fest, dass Gleichungen wie $42 + x = 13$ in $\mathbb{N}_0$ keine Lösung haben. Um alle Gleichungen dieser Art lösen zu können, benötigt man negative ganze Zahlen. Mit der Null und den positiven ganzen Zahlen bilden sie den Zahlenbereich $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen [integer numbers].

Jetzt lässt sich zwar $13 \cdot x = 26$ lösen, aber nicht $13 \cdot x = 27$. Dazu benötigt man Brüche. Alle bisher erwähnten Zahlen zusammen bilden den Bereich der rationalen Zahlen [rational numbers] $\mathbb{Q} = \{\frac{27}{13}; -98{,}5; 0; \frac{2}{3}; -5\frac{4}{89}; \ldots\}$. („Ratio“ heißt nicht nur Verstand, sondern auch Verhältnis. Das „Q“ kommt von „Quotient“.)

Um $x^2 = 3$ lösen zu können oder den Umfang eines Kreises mit Durchmesser 1 als Zahl ausdrücken zu können, benötigt man einen noch größeren Zahlenbereich: die reellen Zahlen [real numbers] $\mathbb{R} = \{\sqrt[5]{27/13}, -4\pi, 42, \ldots\}$. Messwerte werden typischerweise als reelle Zahlen aufgefasst.

2 Imaginäre Einheit, komplexe Zahlen

Auch die reellen Zahlen sind nicht mächtig genug, um die Gleichung

zu lösen. Hierfür erfindet man die „imaginäre Einheit“ i oder j. (In der Mathematik und der Physik schreibt man i, in der Elektrotechnik j, weil dort schon die Wechselstromstärke i heißt.) Die imaginäre Einheit soll genau diese Gleichung lösen.

Nebenbei: Es gibt dann auch sofort eine zweite Zahl, die die gleiche Gleichung löst:

Man bildet alle möglichen Kombinationen aus reellen Zahlen mit der imaginären Einheit und hat damit die komplexen Zahlen [complex numbers]

$$\mathbb{C} = \{ \qquad \}.$$

„Komplex" heißen diese Zahlen nicht, weil sie schwierig sind (Das sind sie nicht!), sondern weil sie zusammengesetzt sind, wie ein Gebäudekomplex oder ein Komplex in der Psychologie.

In Gleichungen schreibt man für variable oder unbekannte komplexe Zahlen gerne z statt x.

In C++ finden Sie ein Template für komplexe Zahlen samt aller üblichen Rechenoperationen und Funktionen in der Header-Datei `<complex>`.

3 Warum komplexe Zahlen? – Die Eulersche Identität

Es gibt wichtigere Dinge, als $x^2 = -1$ lösen zu können. Warum also komplexe Zahlen? Die Mathematiker freuen sich, weil mit den komplexen Zahlen plötzlich *jede* Gleichung einer Machart wie

$$x^{13} - 5x^9 + \frac{23}{7}x^3 + \sqrt{42} = 0$$

mindestens eine Lösung hat: Fundamentalsatz der Algebra. Das ist rechentechnisch nett, aber in der Praxis nicht übermäßig spannend.

In Physik, Elektrotechnik und Signalverarbeitung ist eine andere Eigenschaft der komplexen Zahlen viel wichtiger und extrem praktisch: die Eulersche Identität

$$\qquad .$$

(Streng genommen gilt diese Gleichung nur, wenn der Winkel im Bogenmaß gemessen wird. Später im Semester gibt es für sie eine Begründung, im Rahmen der Potenzreihen.) Wenn man mit sinusförmigen Schwingungen und Wellen zu tun hat (Netzspannung, Lichtwellen, Wasserwellen, Stromgenerator, ...), kann man also statt mit $e^{i\phi}$ statt mit Sinus und seinen Freunden rechnen.

Das sieht zunächst absurd aus: Was heißt es, $e = 2{,}7\ldots$ mit i zu potenzieren? Es spart aber extrem viel Rechenarbeit und Rechenfehler. Statt der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus wie

$$\sin(\alpha + \beta) = \qquad$$

muss man sich nur noch ein Potenzrechengesetz merken:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \qquad .$$

Und statt der Ableitungen

$$\begin{aligned} \sin' &= \boxed{}, \\ \cos' &= \boxed{} \end{aligned}$$

muss man sich nur noch merken:

$$\frac{d\,e^{i\phi}}{d\phi} = \boxed{}.$$

Diese Vereinfachungen beim Arbeiten mit Schwingungen und Wellen sind der wichtigste Grund, komplexe Zahlen zu benutzen.

In der Physik gibt es noch eine weitere wesentliche Anwendung: Die wellenförmige Ausbreitung von Elementarteilchen lässt sich nur mit einer komplexwertigen Wellenfunktion sinnvoll beschreiben. Dies ist kein Rechentrick mehr, sondern ein wesentlicher Teil der Physik.

4 Gaußsche Zahlenebene

Die übliche Vorstellung von den reellen Zahlen ist eine Gerade – der unendlich ausgedehnte (aber das Unendliche nicht umfassende) Zahlenstrahl:

Jede komplexe Zahl wird von *zwei* reellen Zahlen bestimmt. Im Fall von $z = 3{,}4 - 2{,}9i$ sind das die Zahlen $\mathrm{Re}(z) = 3{,}4$ (der Realteil [real part]) und $\mathrm{Im}(z) = -2{,}9$ (der Imaginärteil [imaginary part]). Also kann man die Menge der komplexen Zahlen als eine unendlich ausgedehnte Ebene auffassen: die Gaußsche Zahlenebene. Die x-Koordinate ist der Realteil, auch gerne a genannt; die y-Koordinate ist der Imaginärteil, auch gerne b genannt. Die reellen Zahlen haben die Imaginärteil 0: Der übliche Zahlenstrahl ist die horizontale Achse.

Die meisten Operationen mit komplexen Zahlen kann man *arithmetisch* (rechnerisch) auffassen, aber genauso auch *geometrisch* in der Gaußschen Zahlenebene verstehen. Das gilt insbesondere für die Grundrechenarten, wie die folgenden Abschnitte zeigen.

5 Addition, Subtraktion

Arithmetisch bestimmt man die Summe und die Differenz von komplexen Zahlen, als ob i eine harmlose Zahl wäre:

Geometrisch entspricht das der Summe und der Differenz von Pfeilen in der Gaußschen Zahlenebene:

6 Betrag, komplexe Konjugation, Winkel

Der Betrag [magnitude] $|z|$ einer komplexen Zahl z ist ihre Länge als Pfeil in der Gaußschen Zahlenebene, also nach Pythagoras:

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}\,.$$

Für reelle Zahlen ist das der herkömmliche Absolutbetrag!

Mit dem „konjugiert Komplexen" $\overline{z}$ einer komplexen Zahl z bezeichnet man die Zahl mit negiertem Imaginärteil:

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}\,.$$

Damit kann man das Quadrat des Betrags schreiben (dritte Binomische Formel!):

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}\,.$$

Der Winkel (oder Argument oder Phase) $\arg(z)$ einer komplexen Zahl z ist der Winkel zwischen ihrem Pfeil und der positiven reellen Achse, mit Vorzeichen gegen den Uhrzeigersinn gemessen. Er ist nur bis auf Vielfache von $2\pi = 360°$ bestimmt. Für die Zahl 0 ist der Winkel unbestimmt.

$$\tan(\arg(z)) = \boxed{\qquad\qquad}\,.$$

$\arg(z)$ ist in der Hälfte der Fälle *nicht* der Arcustangens, selbst wenn das in vielen Büchern so steht. Vielmehr gilt:

$$\arg(z) = \boxed{\qquad\qquad}\,.$$

Diese Funktion gehört auch zur Standardaustattung von C, Java usw.

Mit ihrem Betrag $|z|$ und dem Winkel $\arg(z)$ lässt sich eine komplexe Zahl z in „Polardarstellung" schreiben:

$$z = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}\,.$$

Grafisch:

Wegen der Eulerschen Identität vereinfacht sich das zu:

$$z = \boxed{\quad\quad\quad\quad}.$$

7 Multiplikation

Arithmetisch berechnet man das Produkt von komplexen Zahlen wieder, als ob i eine harmlose Zahl wäre, allerdings eine mit $i^2 = -1$:

.

Um die *geometrische* Konstruktion des Produkts zu verstehen, geht man von der Polardarstellung aus. Seien $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$, dann ist

$$z_1 \cdot z_2 = \boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}.$$

Anschaulich werden bei der Multiplikation von komplexen Zahlen also ihre Längen $\boxed{}$ und ihre Winkel $\boxed{}$. Grafisch:

8 Division

Arithmetisch berechnet man den Quotienten von komplexen Zahlen wieder, als ob i eine harmlose Zahl wäre, allerdings (Überraschung?) eine mit $i^2 = -1$. Der besondere Trick ist, mit dem komplex Konjugierten des Nenners zu erweitern:

Für die *geometrische* Version schaut man sich für komplexe Zahlen z_1 und $z_2 \neq 0$ wieder die Polardarstellung an:

$$\frac{z_1}{z_2} = \boxed{}.$$

Also werden bei der Division von komplexen Zahlen ihre Längen ☐

und ihre Winkel ☐.

9 Rechengesetze

Für alle komplexen Zahlen a, b, c gelten:

- Assoziativität der Addition: ☐
- Null ist neutrales Element der Addition: ☐
- Zu jeder Zahl a gibt es eine additiv inverse, nämlich ☐.
- Kommutativität der Addition: ☐
- Assoziativität der Multiplikation: ☐
- Eins ist neutrales Element der Multiplikation: ☐
- Zu jeder Zahl $a \neq 0$ gibt es eine multiplikativ inverse, nämlich ☐.
- Kommutativität der Multiplikation: ☐
- Man darf aus- und einklammern (Distributivität): ☐

Diese Rechengesetze abstrahiert man in der Mathematik zum Begriff des Körpers. Die komplexen Zahlen sind der umfassendeste Zahlenbereich, der die reellen Zahlen enthält und für den alle diese Rechengesetze gelten. In der Robotik verwendet man vierdimensionale Zahlen (Quaternionen), um Drehungen im Raum zu beschreiben. Dort ist die Multiplikation nicht mehr kommutativ – eben genau wie bei Drehungen im Raum.