Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen. Polynomfaktorisierung

Jörn Loviscach

Versionstand: 23. März 2009, 18:06

1 Ganzzahlige Potenzen komplexer Zahlen

So wie die Grundrechenarten kann man auch eine Potenz [power] einer komplexen Zahl arithmetisch (rechnerisch) wie geometrisch (Pfeile in der Zahlenebene) auffassen. Ganzzahlige positive Potenzen sind dabei am einfachsten, weil es nur mehrfache Produkte sind. *Arithmetisch*:

$$(1+i)^3 = \boxed{}.$$

Um das *geometrisch* zu verstehen, geht man wieder auf die Polarstellung zurück:

$$1+i = \boxed{}.$$

Davon benötigt man nun für $(1+i)^3$ drei Faktoren hintereinander. Aus den Potenzrechengesetzen ergibt sich:

$$(1+i)^3 = \boxed{}.$$

Im Bild:

Das geht offensichtlich auch allgemein (Moivrescher Satz): Um eine komplexe Zahl mit einer positiven ganzen Zahl n zu potenzieren, wird ihre Länge $\boxed{\qquad\qquad}$ und ihr Winkel $\boxed{\qquad\qquad}$. Ein Spezialfall davon:

$$(e^{13i}))^{42} = \boxed{\qquad\qquad}.$$

Das von den reellen Zahlen bekannte Potenzrechengesetz soll auch für alle komplexe Zahlen $z \neq 0$ (Warum nicht die Null?) gelten:

$$z^{n+m} = z^n \cdot z^m \quad \text{für alle ganzen Zahlen } n \text{ und } m.$$

Also muss man auch für alle komplexen Zahlen z definieren:

$$\begin{aligned} z^1 &= \boxed{\qquad\quad}, \\ z^0 &= \boxed{\qquad\quad}, \\ z^{-1} &= \boxed{\qquad\qquad}, \\ z^{-2} &= \boxed{\qquad\qquad} \\ &\ \text{und so weiter.} \end{aligned}$$

2 Wurzeln komplexer Zahlen

Eine Wurzel [root] zu ziehen, heißt, eine Potenzgleichung zu lösen. Beispiel:

$$x \in \mathbb{R} \text{ mit } x^4 = 16 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\qquad\qquad}.$$

Hier ahnt man schon den Ärger, den man mit Wurzeln aus komplexen Zahlen haben wird: Es gibt meist gleich mehrere. Bei den reellen Zahlen löst man diese Mehrdeutigkeit, indem die Wurzelfunktion nur die positive Lösung angibt, selbst wenn es eine zusätzliche, negative Lösung gibt, also $\sqrt[3]{-8} := -2$, aber $\sqrt{4} := +2$ und auch nur $+2$, nicht -2. Deshalb steht so häufig das $\pm$ vor der Quadratwurzel.

Mit komplexen Zahlen wird diese Mehrdeutigkeit noch schlimmer, aber dafür auch geometrisch interessanter: Welche komplexen Zahlen erfüllen die Gleichung

$z^3 = 8$?

Diese Lösungen sind *die* (Mehrzahl!) komplexen dritten Wurzeln der Zahl 8. Plötzlich hat die Zahl 8 also nicht mehr nur eine dritte Wurzel. Eine davon ist schöner als die anderen, weil sie dichter an der positiven reellen Achse liegt (in diesem Fall sogar *auf* der Achse liegt). Diese sozusagen schönste Wurzel heißt der „Hauptwert“ [principal value]. Aber rechnerisch ist sie nicht besser als die anderen. Viele, aber nicht alle Autoren nehmen als Hauptwert diejenige Wurzel, die *gegen den Uhrzeigersinn* am dichtesten an der positiven reellen Achse liegt.

Allgemein hat eine Gleichung der Art $z^n = c$ für gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$ und $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ genau n verschiedene komplexe Zahlen z als Lösung: die n-ten Wurzeln der Zahl c. (Was passiert, wenn $c = 0$ ist?)

Geometrische Konstruktion der fünften Wurzeln der komplexen Zahl $1 + 2i$:

Also kann man diese Wurzeln rechnerisch so ausdrücken:

Eine besondere Rolle spielen die n-ten Einheitswurzeln, also die Lösungen von $z^n = 1$ für $n \in \mathbb{N}^+$. Auch davon gibt es n verschiedene!

Wichtig: Weil die Wurzeln im Komplexen nicht eindeutig sind, muss man beim Umformen von Gleichungen extrem vorsichtig sein. Am besten verwenden Sie *nie* das Wurzelsymbol oder gebrochenzahlige Exponenten, sondern drücken alles mit ganzzahligen Potenzen aus. Also lieber $z^{13} = \text{bla}$ schreiben statt $z = \sqrt[13]{\text{bla}}$, denn diese letztere Gleichung sieht so aus, als ob es nur ein z gäbe.

Der Ärger fängt schon mit der imaginären Einheit i selbst an: Man darf im Prinzip $i = \sqrt{-1}$ mit der Wurzel schreiben. Aber dann ist Vorsicht beim Umformen angesagt:

$$z = -i \quad \boxed{\quad} \quad z^2 = -1 \quad \boxed{\quad} \quad z = \sqrt{-1} \quad \boxed{\quad} \quad z = i$$

3 Allgemeine Potenzen komplexer Zahlen

Nun kann man auch solche Potenzen ausrechnen wie

$$(13 + 42i)^{12{,}345} = \boxed{\qquad\qquad\qquad}.$$

(Wie viele verschiedene Zahlen könnte man als Ergebnis angeben?) Diese Rechnung ist in der Praxis sehr selten.

Was man dagegen in der Praxis findet, ist die Eulersche Zahl e hoch eine komplexe Zahl. Was das bedeutet, ist dank der Eulerschen Identität klar:

$$\begin{aligned} e^{12{,}34+56{,}78i} &= \boxed{\qquad\qquad\qquad} \\ &= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}. \end{aligned}$$

4 Komplexwertige Lösungen von Gleichungen

Wo die pq-Formel bisher bei quadratischen Gleichungen versagt, weil etwas Negatives unter der Wurzel steht, kann man mit komplexen Zahlen weiterrechnen:

$z^2 + 6z + 13 = 0 \quad \Longleftrightarrow$.

Weil das ± vor der Wurzel die Mehrdeutigkeit anzeigt, ist es in diesem Fall ungefählich, ein Wurzelsymbol zu schreiben.

Im Regelfall hat eine quadratische Gleichung also nun zwei Lösungen. In Ausnahmefällen sind diese beiden Lösungen gleich (und zwar, wenn 0 unter der Wurzel in der pq-Formel steht). Das geht entsprechend mit Gleichungen höheren Grades:

$$z^5 + 34z^4 - \frac{3}{5}z^3 + 2z^2 + \sqrt{23}z - 12 = 0$$

hat höchstwahrscheinlich *fünf* verschiedene komplexe Zahlen z als Lösung, es sei denn, davon stimmen zufällig welche überein. Das Verhalten ist also viel einfacher als mit reellen Zahlen. (Wie ist es da?)

Im Seminar schauen wir uns am Rechner an, warum das so sein muss.

Nebenbei: Die monströsen Lösungsformeln für Gleichungen dritten und vierten Grades kann praktisch niemand auswendig. Für Gleichungen noch höheren Grades kann es bewiesenermaßen keine allgemeinen Lösungsformeln geben: Satz von Abel-Ruffini.

5 Polynomfaktorisierung

Wenn man die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von $z^2 + 6z + 13 = 0$ hat, kann man die linke Seite (ein Polynom zweiten Grads) sofort als Produkt einfachster Ausdrücke schreiben

(„in Linearfaktoren zerlegen“):

$$z^2 + 6z + 13 = \boxed{\quad} .$$

Jedes Polynom n-ten Grads ($n \in \mathbb{N}$) lässt sich mit Hilfe komplexer Zahlen als Produkt von n Linearfaktoren schreiben. Das ist der Fundamentalsatz der Algebra. Er folgt recht einfach daraus, dass jedes Polynom so viele Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat, wie sein Grad angibt, siehe Abschnitt 4.