Fourier-Reihe mit Sinus und Cosinus. Fast Fourier Transform

Jörn Loviscach

Versionsstand: 17. Juni 2009, 19:03

1 Fourier-Reihe mit Sinus und Cosinus

Gegeben sei eine reell- oder komplexwertige Funktion f mit Periode T. Dann kann man die in eine komplexe Fourier-Reihe entwickeln:

1

Dabei sind die c_n die komplexen Fourier-Koeffizienten:

2

Das kann man alles mit Sinus und Cosinus umschreiben, indem man die Eulersche Identität anwendet. Dabei ergibt sich die Fourier-Reihe mit Sinus und Cosinus:

$f(t) =$ 3

Nicht wundern: Dass a_0 mit dem Faktor 1/2 steht, macht nachher einige Formeln einfacher. Und Vorsicht mit der Reihenfolge: Die a stehen mit dem Cosinus.

Zwei Unterschiede zur komplexen Fourier-Reihe:

- Es tauchen keine negativen Frequenzen mehr auf.
- Die Amplitude und die Phase der n-ten Oberwelle ist nun in a_n und b_n versteckt (Wie?) statt im Betrag und Winkel von c_n.

Ist f eine gerade (und weiterhin periodische!) Funktion, d. h. $f(-t) = f(t)$ für alle t, dann kann offensichtlich kein Sinus vorkommen, also sind alle b_n gleich null. Umgekehrt kann in einer ungeraden Funktion f, d. h. $f(-t) = -f(t)$ für alle t, kein Cosinus vorkommen, also sind alle a_n gleich null.[c1]

[c1] *text added by jl*

2 Fourier-Koeffizienten für Sinus und Cosinus

Man könnte aus c_n und c_{-n} die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n bestimmen. Aber es gibt auch einen direkten Weg. Dazu überlegt man sich Folgendes:

$$\int_0^T (\cos(2\pi nt/T))^2\,dt = \boxed{}\ \text{[4]} \qquad \text{für alle } n = \boxed{1}, 2, 3, \ldots,$$

denn:

$\boxed{}$ [5]

$$\int_0^T (\sin(2\pi nt/T))^2\,dt = \boxed{}\ \text{[6]} \qquad \text{für alle } n = \boxed{1}, 2, 3, \ldots,$$

denn:

$\boxed{}$ [7]

$$\int_0^T \sin(2\pi nt/T)\sin(2\pi mt/T)\,dt = \boxed{}\ \text{[8]} \qquad \text{für alle } n, m = \boxed{1}, 2, 3, \ldots \text{ mit } n \neq m,$$

denn mit zweifacher partieller Integration ergibt sich:

$\boxed{}$ [9].

Und entsprechend:

$$\int_0^T \sin(2\pi nt/T)\cos(2\pi mt/T)\,dt = \boxed{}\ \text{[10]} \qquad \text{für alle } n, m = \boxed{1}, 2, 3, \ldots \text{ mit } n \neq m$$

und das sogar für $n = m$ (einfache partielle Integration)[c1] sowie

$$\int_0^T \cos(2\pi nt/T)\cos(2\pi mt/T)\,dt = \boxed{}\ \text{[11]} \qquad \text{für alle } n, m = \boxed{1}, 2, 3, \ldots \text{ mit } n \neq m.$$

Daran sieht man, dass sich die Sinus- und Cosinus-Funktionen der Fourier-Reihe fast so verhalten wie die Funktionen $e^{i\cdots}$ der komplexen Fourier-Reihe. Sie stehen senkrecht aufeinander und haben alle die gleiche Norm („Länge“).

[c1] *text added by jl*

Wenn man also $f(t)$ mit $\cos(2\pi nt/T)$ integriert, wird man erhalten:

12

Also muss für die Fourier-Koeffizienten a_n gelten:

13

Durch den Trick mit dem $\frac{1}{2}a_0$ gilt diese Formel auch für den Gleichspannungsanteil $n = 0$. Entsprechend gibt für die Fourier-Koeffizienten b_n:

14

3 Fast Fourier Transform (FFT)

Typischerweise hat man Signale als Folgen von Messwerten (Samples) gegeben statt als kontinuierliche Funktionen (Demo mit Audacity).

15

Dann lassen sich die Fourier-Koeffizienten mit Summen über die Samples statt mit Integralen berechnen (Diskrete Fourier-Transformation, DFT). Indem man diese Summen geschickt zusammenfasst, kann man die Rechnung beschleunigen (Fast Fourier Transform, FFT). Dies ist die übliche Art, Fourier-Analyse zu betreiben. Dafür stehen auch diverse Programmierbibliotheken bereit, insbesondere FFTW (Link).

Der Name „Transformation" bei DFT und FFT ist irreführend. Die beiden sind mehr mit der Fourier-*Reihe* als mit der Fourier-*Transformation* verwandt. Insbesondere beziehen sie sich immer nur auf einen endlichen Ausschnitt eines Signals (Demo mit Audacity).