

Abbildungen, Funktionen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 9. November 2009, 19:28

1 Begriffe Abbildung, Funktion

Eine Abbildung [mapping, map] namens f ordnet jedem Element x eines Definitionsbereichs [domain] D genau ein Element y eines Wertevorrats [range] / einer Zielmenge W zu. Diese Beziehung zwischen f und den Mengen schreibt

man $f(x) = y$. Diese Formel sagt aber noch nichts darüber, wie die Abbildung im Detail funktioniert. Das schreibt man als Zuordnungsvorschrift, schul-

mäßig als Gleichung $f(x) = y$ oder professionell mit einem Abbildungs-

pfeil $f: D \rightarrow W$. Statt $f(x)$ wird dann typischerweise eine Formel angege-

ben wie bei $f(x) = \frac{x^2+7}{x-3}$.

Wenn Definitionsbereich und Zielmenge Zahlenmengen sind, nennt man eine Abbildung meist eine Funktion [function]. Mathematisch sind Abbildungen und Funktionen aber dasselbe.

Beispiele: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ habe die Abbildungsvorschrift $x \mapsto \frac{x^2+7}{x-3}$. Was ist der maximal mögliche Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$?

2 Vorstellungen

Es gibt mehrere übliche Vorstellungen von Abbildungen/Funktionen. Hier sind vier davon.

Vorstellung 1: Maschine. Eine Abbildung f ist eine Maschine, in die man ein Teil aus D als Rohmaterial hineinwerfen kann und aus der man dann ein Teil aus W als Produkt zurückerhält:

Alle Teile aus D müssen akzeptiert werden; nur Teile aus W dürfen produziert werden. Es wird immer genau ein Teil produziert (nicht null, nicht sieben). Wenn man dasselbe Teil aus D nochmal hinein wirft, muss wieder dasselbe Teil aus W produziert werden wie beim ersten Mal.

Vorstellung 2: Tabelle. Eine Abbildung f ist eine Tabelle (gegebenenfalls unendlich lang), aus der man für jedes $x \in D$ das zugehörige $f(x) \in W$ ablesen kann:

7

In der x -Spalte der Tabelle muss jedes Element aus D genau einmal vorkommen (nicht nullmal, nicht siebenmal). In der $f(x)$ -Spalte der Tabelle dürfen nur Elemente aus W stehen. Die Reihenfolge der Zeilen in der Tabelle ist egal.

Vorstellung 3: Pfeildiagramm:

8

Von jedem Element in D muss genau ein Pfeil starten und zu einem Element in W führen. Es ist erlaubt, dass mehrere Pfeile auf einem Element von W enden. Es ist auch erlaubt, dass Elemente von W von keinem Pfeil erreicht werden.

Vorstellung 4: Funktionskurven (offizieller Name: Funktionsgraphen):

9

Funktionen: Hier sind D und W also Mengen von Zahlen. D ist ein Bereich auf der x -Achse, W ein Bereich auf der y -Achse. D und W können sich natürlich auch jeweils über die gesamten Achsen erstrecken. Zu jedem $x \in D$ (und nur für solche x) ist genau ein $y \in W$ markiert. Anmerkung: Fiese Funktionen bilden keine

anschaulichen „Kurven“, sondern können zum Beispiel zu Staub zerfallen:

¹⁰

3 Was geht und was nicht

Eine Abbildung/Funktion braucht nicht unbedingt eine ausdrückliche Rechen-
vorschrift wie $x \mapsto \sin(x^{13})$, mit der man sie ausrechnen kann. Vielmehr kann
eine Abbildung/Funktion in Worten beschrieben sein:

¹¹

Oder sie ist nur indirekt gegeben:

¹²

Beim Programmieren in Sprachen wie C kommen ebenfalls „Funktionen“ vor.
Diese sind aber allgemeiner als die mathematischen Funktionen:

- Sie dürfen ohne Eingabe bleiben.

¹³

- Sie dürfen ohne Ausgabe bleiben.

¹⁴

- Sie müssen nicht bei gleicher Eingabe immer die gleiche Ausgabe liefern.

¹⁵

- Das Wichtigste: Sie dürfen Nebeneffekte haben.

¹⁶

4 Bildmenge

Die Menge der tatsächlich vorkommenden Elemente der Zielmenge W heißt Bild
[image] oder Bildmenge $f(D)$:

17

Vorsicht, Namensverwirrung: Das Wort „Wertebereich“ [range] ist unklar. Es kann je nach Autor die Zielmenge = den Wertevorrat W bezeichnen oder aber die Bildmenge $f(D)$.^{c1}

Beispiele:

- Die Funktion $f_1 : [3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $x \mapsto x^2$. Was ist die Bildmenge?

18

- Die Funktion $f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $x \mapsto$ Anzahl der Nullen in der Dezimaldarstellung von x . Was ist die Bildmenge?

19

- Die Menge aller endlichen Zeichenketten heiße S . Die Abbildung $f_3 : S \rightarrow S$ habe die Abbildungsvorschrift $x \mapsto$ ersetze in x ^{c1} jeden Buchstaben a ^{c2} durch den Buchstaben b . Was ist die Bildmenge?

20

^{c1}jl: Einige Autoren bezeichnen Zielmenge = Wertevorrat W als Menge. Das passiert ebenso im Löschen mit dem unklaren Begriff ge).

^{c1} text added by jl

^{c2}removed text by jl: in x