

# Grundlagen zu Integralen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 13. Oktober 2009, 20:56

*Dies ist eine Quick&Dirty-Version zu Beginn des Semesters, als Hilfe für die Parallelfächer. Im Detail behandeln wir das später noch einmal.*

## 1 Unbestimmtes Integral, Stammfunktion

Viele mathematische Modelle verwenden Differentialgleichungen. Das sind Gleichungen, in denen die Ableitungen von gesuchten Funktionen vorkommen. Beispiele:

- Geschwindigkeit = Ableitung der Position nach der Zeit



- Strom in Kondensator hinein = Kapazität mal Ableitung der Spannung nach der Zeit



In solchen Gleichungen will man von der Ableitung auf die unbekannte Funktion schließen, die abgeleitet worden ist. Gesucht ist wohlgermerkt eine Funktion, keine Zahl.

Bei Gleichungen für schlichte Zahlen sieht das so aus: Um eine Gleichung wie  $x^3 = 8$  nach  $x$  aufzulösen, verwendet man die dritte Wurzel; um  $e^x = 7$  nach  $x$  aufzulösen, verwendet man den natürlichen Logarithmus.

So wie die dritte Wurzel die dritte Potenz auflöst und der natürliche Logarithmus die Exponentialfunktion rückgängig macht, macht das unbestimmte Integral [indefinite integral] das Ableiten rückgängig – zumindest fast: Stichwort „plus eine Konstante“; mehr dazu gleich. Das Ergebnis des unbestimmten Integrals heißt auch eine Stammfunktion [*im Englischen klarer benannt: antiderivative*] der gegebenen Funktion.

Eine Tabelle mit Ableitungen lässt sich damit rückwärts lesen und wird so zu einer Tabelle von Stammfunktionen:

Funktion	→	Ableitung
Stammfunktion	←	Funktion
$x \mapsto 42x + 13$		3
$x \mapsto x^2$		4
$x \mapsto x^{13}$		5
$x \mapsto \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$		6
$x \mapsto \sqrt{x}$ für $x > 0$		7
$x \mapsto \sin(x)$		8
$x \mapsto e^x$		9
$x \mapsto \ln(x)$ für $x > 0$		10
$x \mapsto \ln( x )$ für $x \neq 0$		11

Achtung: In dieser Tabelle steht jeweils nur *eine* Stammfunktion (eine von vielen), nicht *die* Stammfunktion (eine einzige), denn man kann eine Konstante dazu addieren und erhält eine weitere Stammfunktion, denn die Konstante fällt beim Ableiten weg. Schulbuchmäßig schreibt man das unbestimmte Integral zum Beispiel vom Cosinus als  $\sin(x) + C$ . Das  $C$  steht dabei für eine unbekannte Zahl, die nicht von  $x$  abhängt, eben eine Konstante.

Das unbestimmte Integral einer Funktion  $f$  wird aus historischen Gründen meist so geschrieben:

<sup>12</sup> Nicht vergessen: Es kommt dabei eine Funktion heraus (eine Stammfunktion), kein Zahlenwert. Und diese Stammfunktion ist nicht einmal komplett bekannt; man darf eine beliebige Konstante dazu addieren. Schulbuchmäßig bezeichnet man eine Stammfunktion der Funktionen  $f$ ,  $g$  oder  $h$  mit dem entsprechenden Großbuchstaben, also  $F$ ,  $G$  oder  $H$ . Die Ableitung hebt das Bilden der Stammfunktion auf: <sup>13</sup>

## 2 Bestimmtes Integral, Flächenberechnung

Schulmäßig definiert man das bestimmte Integral

<sup>14</sup> als den Flächeninhalt unterhalb der Funktionskurve von  $f$  zwischen den Grenzen  $x = a$  und  $x = b$ . Dabei werden Flächen unter der  $x$ -Achse negativ gerechnet:

15

---

Anschaulich ist klar, dass man die Fläche stückeln darf:

16

Das bestimmte Integral ist eine Zahl (nämlich die Fläche mit Vorzeichen) und nicht wie das unbestimmte Integral eine Funktion. Trotzdem sind beide sehr eng verwandt: Hat man eine Stammfunktion (also ein unbestimmtes Integral)  $F$  von  $f$ , kann man daraus das bestimmte Integral gewinnen:

17

Dieser Ausdruck wird auch gerne so geschrieben:

18

Beispiel: Wie groß ist die Fläche unter der Normalparabel von  $x = 2$  bis  $x = 3$ ?

19

Dass das bestimmte und das unbestimmte Integral auf diese Art zusammenhängen, kann man sich grob so vorstellen: Wenn man nicht bis zur oberen Grenze  $b$  integriert, sondern ein Stückchen  $h$  weiter, bis  $b + h$ , kommt ungefähr  $f(b) \cdot h$  zur Fläche hinzu:

20

Die Fläche wächst also mit der Rate  $\frac{f(b) \cdot h}{h} = f(b)$ . Die Ableitung der Fläche nach der oberen Grenze  $b$  ist damit  $f(b)$ ; also ist die Fläche in Abhängigkeit von  $b$  eine Stammfunktion von  $f$ . Hat man bereits eine andere Stammfunktion  $F$  von  $f$ , weiß man nun:

21  
⊗

Die Konstante  $C$  ist noch unbekannt. Wir wissen aber, dass die Fläche (also das bestimmte Integral) null wird, wenn die rechte Grenze  $b$  mit der linken Grenze  $a$  übereinstimmt. Aus dem Ausdruck ⊗ kommt für  $b = a$  nur dann null heraus,

wenn wir <sup>22</sup> setzen.

### 3 Integrationsregeln

Man liest die Regeln für die Ableitung rückwärts und hat damit Regeln für die Integration (Details später):

- $\int cf(x)dx$  mit einer Konstanten  $c$  wird <sup>23</sup> . Diese Regel gilt auch für negative  $c$ , was die Mathematik einfacher macht. Eine Folge davon ist aber, dass die Fläche unterhalb der  $x$ -Achse negativ gezählt werden muss.

- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$  <sup>24</sup> .

- Partielle Integration:  $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$  <sup>25</sup> .  
Beispiel:  $\int \sin(x)x dx =$

<sup>26</sup>  $-\cos(x)x + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$  .

- Integration durch Substitution:  $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$  <sup>27</sup> .  
Beispiel:  $\int \sin(x^2)x dx =$

<sup>28</sup>  $-\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$  .

Rein rezeptmäßig und formal kann man das auch so bewerkstelligen:

<sup>29</sup>  $\int \sin(x^2)x dx = \int \sin(u) \frac{1}{2} du = -\frac{1}{2}\cos(u) + C = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$  .

Wie bei der Ableitung zeigt Wolfram Alpha auch bei der Integration, wie es vorgeht („Show steps“): `integrate sin(x^2)x`

### 4 Numerische Integration

Mit Hilfe der Ableitungsregeln kann man die Ableitung jeder schulmäßigen Funktion wie  $\sin(\sqrt{x^2+7})/(x^4+7)$  wieder mit üblichen Funktionen hinschreiben. Eine Stammfunktion zu bilden – also das Umgekehrte – geht zwar oft, aber nicht immer. Ein Beispiel: Zu der in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtigen

Funktion  $x \mapsto e^{-x^2}$  kann man eine Stammfunktion aufmalen:

---

In Wolfram Alpha: `integrate exp(-x^2)`. Diese Stammfunktion lässt sich aber nicht aus den üblichen Funktionen zusammenbasteln. In solchen Fällen formuliert man typischerweise das Problem so um, dass es statt mit unbestimmten Integralen mit *bestimmten* Integralen wie `integrate exp(-x^2) from -1 to 3` ausgedrückt ist. Deren Zahlenwerte bestimmt man durch Näherungsrechnungen: numerische Integration.

Wenn Wolfram Alpha nicht weiter weiß, bietet es Näherungsformeln und/oder numerische Ergebnisse an: `integrate sin(x^2)`. Numerische Integration ist sowieso die einzige Chance, wenn die zu integrierende Funktion nicht als Formel gegeben ist, sondern als Folge von Messwerten.