

# Folgen. Grenzwerte. Stetigkeit

Jörn Loviscach

Versionsstand: 19. Dezember 2009, 18:57

## 1 Folgen

Eine Folge [sequence] ist eine Auflistung von mathematischen Objekten: Zahlen, Vektoren, Funktionen, ... Typischerweise bezeichnet man mit dem Begriff „Folge“ eine *unendliche* Folge, will sagen, eine Folge, bei der jedem Index aus  $\mathbb{N}^+$  oder  $\mathbb{N}_0$  ein Folgenglied zugeordnet wird. Eine Folge ist also nichts Anderes als eine Abbildung mit Definitionsbereich  $\mathbb{N}^+$  oder  $\mathbb{N}_0$ .

Hier sind ein paar Folgen von Zahlen:

1

Hier eine Folge von Funktionen:

2

Hieran sieht man auch schon die wesentliche Anwendung für Folgen: Sie erlauben, die Annäherung im Unendlichen mathematisch auszudrücken.

Weil man nicht unendlich viele Folgenglieder angeben kann, nennt man typischerweise nur ein Bildungsgesetz, zum Beispiel eine Rechenvorschrift. Das Bildungsgesetz kann explizit sein, d. h. der Wert des  $n$ -ten Folgenglieds ist direkt zu berechnen:

3

---

Das Bildungsgesetz kann aber auch implizit sein. Das heißt, auf beiden Seiten der Gleichung kommen Folgenglieder vor; außerdem ist dann typischerweise der Anfang der Folge gegeben. Dann kann man die Folgenglieder typischerweise per Rekursion bestimmen:

---

4

Viele Näherungsverfahren erzeugen rekursiv definierte Folgen. Beispiel: das Newton-Verfahren zur Nullstellensuche.

---

5

## 2 Eigenschaften von Folgen

Folgen können beschränkt oder unbeschränkt sein, auch nur von oben oder unten:

---

6

Folgen können (müssen aber nicht) monoton oder streng monoton wachsen oder fallen:

7

### 3 Grenzwerte von Folgen

Folgen werden oft benutzt, um im Unendlichen eine Zahl, einen Vektor, eine Funktion oder Ähnliches anzunähern. Eine solche Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  heißt dann konvergent (Gegenteil: divergent) und ihr Ziel im Unendlichen heißt Grenzwert [limit]  $a$ , geschrieben

8

oder mit einem simplen Pfeil:

9

Eine Folge mit Grenzwert null heißt auch Nullfolge.

Beispiele:

10

Hart an der Grenze zur Konvergenz ist die bestimmte Divergenz. Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  von Zahlen, die über alle Grenzen wächst (ohne ausflugsweise zurückzukehren!), heißt bestimmt divergent nach plus Unendlich, geschrieben

11

. Formal liest sich das:

12

Entsprechend definiert man bestimmte Divergenz nach minus Unendlich.

Beispiele:

13

Etwas komplizierter gerät die Definition der Konvergenz: Eine Folge von Zahlen  $a_n$  heißt konvergent mit Grenzwert  $a$ , wenn ihre Folgenglieder ab einem gewissen Index immer in einem Intervall  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  liegen, egal wie klein man  $\epsilon > 0$  wählt. Formal liest sich das:

14

In der Praxis prüft man höchst selten diese Definition nach. Vielmehr sondern benutzt man meist Grenzwertsätze, um sofort das Ergebnis abzulesen.

Jede konvergente Folge muss beschränkt sein, allerdings ist längst nicht jede beschränkte Folge konvergent:

15

Eine nach oben beschränkte monoton wachsende Folge muss aber auch konvergent sein:

16

## 4 Grenzwertsätze

Es seien zwei konvergente Zahlenfolgen  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$  gegeben. Dann gilt offensichtlich:

---

17

Es seien eine beschränkte Zahlenfolge  $c_n$  und eine bestimmt divergente Zahlenfolge  $d_n \rightarrow \infty$  gegeben. Dann gilt offensichtlich:

---

18

Beispiel: Was passiert mit  $\frac{n^2 + \sin(n)}{2n^2 + e^{-n}}$  für  $n \rightarrow \infty$ ?

---

19

## 5 Grenzwerte von Funktionen

Man kann sich fragen, was der Wert einer Funktion  $f$  an einer Stelle  $x_0$  am besten sein *sollte* – basierend auf den Werten an benachbarten Stellen, wenn man den Wert an  $x_0$  nicht hat oder ihn ignoriert, falls man ihn hat:

20

Diese Frage ist nur an solchen Stellen  $x_0$  sinnvoll, die beliebig nahe Nachbarn im Definitionsbereich haben. Diese Stellen können im Definitionsbereich oder (knapp!) außerhalb davon liegen. Einen Grenzwert an einer isolierten Stelle im Definitionsbereich kann man mit dem klassischen Grenzwertbegriff nicht bilden.

Der „sinnvolle“ Wert heißt dann Grenzwert der Funktion an der Stelle  $x_0$ ,  
geschrieben <sup>21</sup>  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . Allerdings muss es diesen Grenzwert nicht immer geben:

22

Schulmäßig schreibt man für den Grenzwert einer Funktion eine Definition wie für den Grenzwert eine Folge hin (dann mit  $\epsilon$  und  $\delta$ ). Einfacher zu verstehen ist es aber vielleicht mit Folgen:

23

Beispiele:

24

Man kann den Begriff des Grenzwerts einer Funktion einschränken auf den einseitigen Grenzwerte für  $x \downarrow x_0$  (schulmäßig geschrieben als  $x \rightarrow 0^+$ ) und den

einseitigen Grenzwert für  $x \uparrow x_0$  (schulmäßig geschrieben als  $x \rightarrow 0^-$ ). Beispiele:

<sup>25</sup>

Weitere Grenzwerte von Funktionen sind die im Unendlichen, also für  $x \rightarrow \infty$  bzw. für  $x \rightarrow -\infty$ . Hier kann man untersuchen, wie sich  $f(x_n)$  verhält, wenn  $x_n$  eine bestimmt divergente Folge im Definitionsbereich (!) ist.

Es gelten für die Grenzwerte von Funktionen entsprechende Grenzwertsätze wie für die Grenzwerte von Folgen, siehe Abschnitt 4.

## 6 Stetigkeit

Stetige [continuous] Funktionen sind solche, bei denen ein kleine Ursache (Änderung von  $x$ ) auch nur eine eine kleine Änderung (Änderung von  $f(x)$ ) hat. Genauer heißt eine Funktion der folgenden Art stetig:

<sup>26</sup>

Dort, wo der Definitionsbereich keine Lücke hat, ist der Graph einer solchen Funktion eine durchgezogene Kurve. Beispiele:

<sup>27</sup>

Insbesondere ist  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto 1/x$  eine stetige Funktion, auch wenn das in der Schulmathematik gerne anders gesagt wird. Jede rationale Funktion ist stetig! Man bezeichnet sogar jede beliebige Funktion als stetig an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs, die isoliert liegt.

Der Zwischenwertsatz [intermediate value theorem] drückt die Eigenschaft der „durchgezogenen Kurve“ aus:

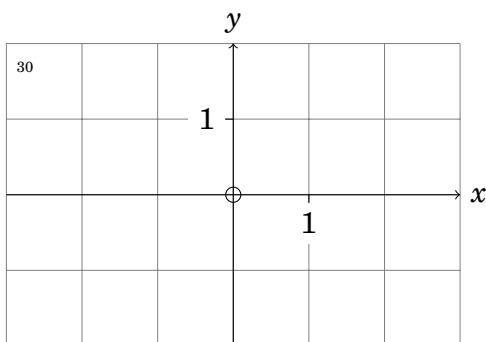
28

Aus der Definition der Stetigkeit folgt ein weiterer Satz für Grenzwerte:

29

Mit anderen Worten: Der Grenzwert einer stetigen Funktion ist die Funktion vom Grenzwert.

Eine Definitionslücke einer Funktion lässt sich sinnvoll schließen (sie ist „hebbare“), wenn der Grenzwert existiert. Dies ergibt dann eine stetige Fortsetzung der Funktion. Die Schulmathematik redet gerne von „hebbaren Unstetigkeiten“, was aber korrekt „stetig hebbare Definitionslücken“ heißen muss. Beispiel:  $x \mapsto e^{-1/x^2}$



## 7 Regel von L'Hôpital

Der Grenzwertsatz über den Quotienten versagt, wenn der Nenner gegen Null geht. Allerdings kann man im folgenden Fall noch etwas retten: Es wird der Grenzwert von  $f(x)/g(x)$  für  $x \rightarrow x_0$  gesucht. Beide Funktionen  $f$  und  $g$  haben an  $x_0$  den Grenzwert null. Beide Funktionen  $f$  und  $g$  sind an  $x_0$  differenzierbar. Die Ableitung  $g'(x_0)$  ist *nicht null*. Dann gilt:



31

---

Dies ist die Regel von L'Hôpital oder L'Hospital.

Überschlägig kann man das so sehen:

---

32

Sollten  $f'(x_0)$  und  $g'(x_0)$  beide null sein, kann man die zweiten Ableitungen betrachten usw. Ebenso kann man betrachten, dass Zähler und Nenner nicht beide null werden, sondern beide unendlich werden.