

Wahrscheinlichkeit

Jörn Loviscach

Versionsstand: 18. Januar 2010, 17:36

1 Ereignisse

Bevor man sich in der Wahrscheinlichkeitslehre = Stochastik Gedanken darüber macht, was Wahrscheinlichkeiten sind, überlegt man sich, *wovon* man Wahrscheinlichkeiten bestimmt – nämlich von Ereignissen [events]. Dies wären anschauliche Ereignisse:

1

Ereignisse treten ein oder nicht (oder sind eingetreten oder nicht). Zwei Ereignisse A und B sind gleich, wenn A dann und nur dann eintritt, wenn B eintritt. Dies wären gleiche Ereignisse für einen Würfel:

2

Als Modell für Ereignisse haben sich Mengen durchgesetzt. Vereinigung, Schnitt und Komplement von Ereignissen haben jeweils die offensichtliche Bedeutung:

3

Als Spezialfälle gibt es das unmögliche Ereignis:

4

Und das sichere Ereignis:

5

Schon jetzt ist klar, welche Wahrscheinlichkeiten zumindest diese beiden spezielle Ereignisse haben werden:

6

Zwei Ereignisse mit leerer Schnittmenge heißen unvereinbar = inkompatibel:

7

Oft zerlegt man Ereignisse sozusagen in atomare Teile: Elementarereignisse. Diese werden verwirrenderweise als *Elemente* von Ereignissen modelliert. So hat ein Würfel diese Elementarereignisse:

8

Damit kann man Ereignisse als Mengen hinschreiben:

9

Achtung: Die Zahl 3 zu würfeln, ist folgendes Ereignis:

10

2 Wahrscheinlichkeit

Für den Begriff Wahrscheinlichkeit [probability] gibt zwei wesentliche Interpretationen. Beide führen zum selben mathematischen Modell.

Bayesscher Wahrscheinlichkeitsbegriff:

11

Frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff:

12

Eine Vorform des frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist der Laplacesche Wahrscheinlichkeitsbegriff:

13

Der erscheint heute allerdings naiv, außer bei elementaren Rechnungen zu Würfeln, Lotto usw.

3 Kolmogorow-Axiome

Mathematisch modelliert man „Wahrscheinlichkeit“ als eine Abbildung:

¹⁴

Diese soll die drei Kolmogorow-Axiome erfüllen:

¹⁵

Daraus kann man viele weitere Eigenschaften herleiten. Zum Beispiel, welche Wahrscheinlichkeit das Gegenereignis eines gegebenen Ereignisses hat:

¹⁶

Oder, was die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigungsmenge zweier beliebiger (also vielleicht nicht unvereinbarer) Ereignisse ist:

¹⁷

Beispiel: Ein (nicht idealer) Würfel sei so, dass die Elementarereignisse folgende Wahrscheinlichkeiten haben:

¹⁸

Dann kann man mit Hilfe der Kolmogorow-Axiome weitere Wahrscheinlichkeiten

angeben:

¹⁹