

Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten

Jörn Loviscach

Versionsstand: 21. Juni 2010, 18:05

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.

1 Idee

Viele Probleme zeigen eine Struktur von Zeilen und Spalten (Kristalle, Solarpanels, Manhattan, ...). Für diese sind die üblichen „kartesischen“ [cartesian] Koordinaten (von René Descartes = Renatus Cartesius) gut geeignet. Viele anderer Probleme weisen aber andere Symmetrien auf, insbesondere kreisförmige (Rad, Planetenbahn, ...), zylinderförmige (Flasche, Tank, ...) oder kugelförmige (Erde, Ballon, Tank, ...):

Dafür gibt es besser geeignete Koordinatensysteme als das kartesische!

2 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten [polar coordinates] kennen wir schon von den komplexen Zahlen: Statt einen Punkt im \mathbb{R}^2 als $(x|y)$ zu bestimmen, gibt man seinen Abstand r vom Ursprung und den positiven oder negativen Winkel „Azimut“ ϕ zur x -Achse an:

Achtung: Der Winkel ϕ ist aber mit Vorsicht zu genießen:

3

Entsprechendes gilt für die Winkel im Folgenden!

Umrechnung von polar nach kartesisch:

4

Umrechnung von kartesisch nach polar:

5

3 Zylinderkoordinaten

Man gibt zu den Polarkoordinaten in der xy -Ebene die übliche z -Achse dazu und hat damit ein Koordinatensystem für den \mathbb{R}^3 , die Zylinderkoordinaten [cylindrical coordinates]:

6

Umrechnung von zylindrisch nach kartesisch:

7

Umrechnung von kartesisch nach zylindrisch:

8

4 Kugelkoordinaten

Die Kugelkoordinaten = sphärischen Koordinaten [spherical coordinates] sind eine andere Erweiterung der Polarkoordinaten ins Dreidimensionale. Statt der kartesischen z -Koordinate wie bei den Zylinderkoordinaten nimmt man hier den Polwinkel = Zenitwinkel θ zur positiven z -Achse hinzu. (Seltener findet man θ aus der xy -Ebene gemessen: Höhenwinkel = Altitude = Elevation.) Außerdem wird der Radius r der komplette Abstand des betrachteten Punkts vom Ursprung, nicht nur die Projektion in die xy -Ebene:

9

Der übliche Wertebereich von θ ist damit

10

Umrechnung von sphärisch nach kartesisch:

11

Umrechnung von kartesisch nach sphärisch:

12

Die geografischen Koordinaten sind damit verwandt: Die geografische Länge [longitude] entspricht dem Azimut, wird also nach Osten positiv. Greenwich liegt bei 0° Länge (nullter Längengrad = Nullmeridian). Die geographische Breite [lati-

tude] ist ¹³ : Sie ist am Äquator null (nullter Breitengrad) und wird nach Norden positiv. In der Landvermessung modelliert man die Erde allerdings nicht als eine Kugel, sondern als ein Ellipsoid: Durch die Fliehkraft ist die Erde am Äquator 42 km dicker als von Pol zu Pol.