

# Lineare Gleichungssysteme, Rang, Kern

Jörn Loviscach

Versionsstand: 13. April 2010, 19:25

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.

Videos dazu: <http://www.youtube.com/joernloviscach>

## 1 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Algebra ist nicht nur für anschauliche Geometrie gut, sondern hilft auch, bestimmte häufig vorkommende Gleichungen zu verstehen und zu lösen: lineare Gleichungssysteme wie

$$\begin{cases} 23x + 45y - 3z + 4w = 7 \\ \phantom{23x} + 2y - z + 6w = -3 \\ -15x + 5y \phantom{- 3z} - 3w = 5 \end{cases}$$

Gemeint ist damit, dass alle diese drei Gleichungen mit ihren vier Unbekannten  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $w$  gleichzeitig gelöst werden sollen. Die Lösungsmenge ist also eine Teil-

menge des  $\mathbb{R}^4$ , vielleicht sogar die leere Menge, wenn es keine Lösungen gibt. Diese Gleichungen heißen linear, weil nur konstante Vielfache der Unbekannten addiert werden. Ausdrücke wie  $\sin(x)$  oder  $y^2$  oder  $xz$  sind in linearen Gleichungen verboten, wenn  $x$ ,  $y$  und  $z$  Unbekannte sind.

Lineare Gleichungssysteme treten zum Beispiel auf, wenn man elektrische oder mechanische (oder soziale?) Netzwerke untersucht. Ein Beispiel aus der Elektronik:

Lineare Gleichungssysteme treten auch als Zwischenschritte beim numerischen

Lösen von Differentialgleichungen auf. Ebenso stößt man auf sie, wenn man komplexe Systeme mit linearen Näherungen beschreibt.

Beim Lösen von Gleichungen fragt man in der Mathematik immer nach Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen:



Viele Techniken, die man hier bei linearen Gleichungssystemen anwendet, tauchen in ähnlicher Form wieder bei linearen Differentialgleichungen auf.

## 2 Existenz von Lösungen

Betrachten wir zunächst die *Existenz* von Lösungen beim ursprünglichen Beispiel. Das kann man mit Hilfe von Vektoren umschreiben:

$$\begin{cases} 23x + 45y - 3z + 4w = 7 \\ \quad \quad 2y - z + 6w = -3 \\ -15x + 5y \quad \quad - 3w = 5 \end{cases} \iff$$

Mit anderen Worten: Es ist eine Mischung der vier Spaltenvektoren zu finden, so dass der Vektor rechts (die „Inhomogenität“) herauskommt. Wenn sich die Inhomogenität nicht aus den vier Spaltenvektoren bilden lässt, gibt es keine Lösung!

Wenn es mindestens so viele Unbekannte (und damit Spaltenvektoren links) gibt, wie es Gleichungen gibt, existiert typischerweise mindestens eine Lösung. Wenn es weniger Unbekannte als Gleichungen gibt, lassen sich garantiert nicht bei allen Inhomogenitäten Lösungen finden.

Mit Hilfe einer Matrix (der „Koeffizientenmatrix“) lässt sich das sogar noch kompakter schreiben:

$$\begin{cases} 23x + 45y - 3z + 4w = 7 \\ \quad \quad \quad 2y - z + 6w = -3 \\ -15x + 5y \quad \quad - 3w = 5 \end{cases} \iff$$

Es ist also ein Vektor zu finden, den die Matrix zu der Inhomogenität macht, also zu dem Vektor rechts. Wenn die Inhomogenität nie aus der Matrix herauskommt, ist die Lösungsmenge leer.

### 3 Bild und Rang einer Matrix

Nennt man die Koeffizientenmatrix  $A$ , setzt  $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$  und nennt die Inhomogenität  $\mathbf{b}$ , ist also die folgende Gleichung zu lösen:

Die Menge aller Vektoren, die tatsächlich aus einer Matrix herauskommen, heißt Bild [image *oder* range] der Matrix, in Formeln:  $\text{Ran}(A)$ . Das Gleichungssystem hat also eine Lösung, mehrere Lösungen oder sogar unendlich viele Lösungen, wenn

Die MATLAB<sup>®</sup>-Funktion `orth` liefert eine (orthonormale) Basis für das Bild.

Frage am Rand: Was ist das Bild der Matrix  $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ ?

Die Zahl der Dimensionen des Bilds einer Matrix heißt **Rang** [rank] der Matrix. Für die Matrix  $B$  von oben gilt also  $\text{rank}(B) = \begin{matrix} 9 \\ \left| \begin{matrix} \phantom{B} \\ \phantom{B} \\ \phantom{B} \\ \phantom{B} \\ \phantom{B} \\ \phantom{B} \\ \phantom{B} \\ \phantom{B} \\ \phantom{B} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ . Die MATLAB®-Funktion heißt ebenfalls `rank`. Achtung: Das Bild einer Matrix ist eine Menge von Vektoren; der Rang einer Matrix ist eine nackte Zahl.

Folgende Aussagen besagen also das Gleiche (d. h. sind logisch äquivalent):

- Das Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix  $A$  ist für jede beliebige Inhomogenität  $\mathbf{b}$  lösbar.
- Jeder Vektor kann aus  $A$  herauskommen.

- $\text{Ran}(A) = \begin{matrix} 10 \\ \left| \begin{matrix} \phantom{A} \\ \phantom{A} \\ \phantom{A} \\ \phantom{A} \\ \phantom{A} \\ \phantom{A} \\ \phantom{A} \\ \phantom{A} \\ \phantom{A} \\ \phantom{A} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ .

- $\text{rank}(A) = \begin{matrix} 11 \\ \left| \begin{matrix} \phantom{A} \\ \phantom{A} \\ \phantom{A} \\ \phantom{A} \\ \phantom{A} \\ \phantom{A} \\ \phantom{A} \\ \phantom{A} \\ \phantom{A} \\ \phantom{A} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ .

## 4 Eindeutigkeit von Lösungen

Nach der *Existenz* untersucht man nun in einem zweiten Schritt die *Eindeutigkeit* der Lösungen.

Angenommen, man hätte zwei Lösungen gefunden:  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} 23x_1 + 45y_1 - 3z_1 + 4w_1 = 7 \\ \phantom{23}2y_1 - z_1 + 6w_1 = -3 \\ -15x_1 + 5y_1 \phantom{- 3z_1} - 3w_1 = 5 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} 23x_2 + 45y_2 - 3z_2 + 4w_2 = 7 \\ \phantom{23}2y_2 - z_2 + 6w_2 = -3 \\ -15x_2 + 5y_2 \phantom{- 3z_2} - 3w_2 = 5 \end{cases}$$

Indem man die Gleichungen voneinander abzieht, findet man:

$$\begin{cases} 23(x_1 - x_2) + 45(y_1 - y_2) - 3(z_1 - z_2) + 4(w_1 - w_2) = 0 \\ \phantom{23}2(y_1 - y_2) - (z_1 - z_2) + 6(w_1 - w_2) = 0 \\ -15(x_1 - x_2) + 5(y_1 - y_2) \phantom{- 3(z_1 - z_2)} - 3(w_1 - w_2) = 0 \end{cases}$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für die Differenzen. Auf der rechten Seite stehen allerdings Nullen: ein „homogenes“ Gleichungssystem (Gegenteil von inhomogen, eben ohne Inhomogenität).

Mit anderen Worten: Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems – wenn es welche gibt – sind genau dann nicht eindeutig bestimmt, wenn das *homogene* Gleichungssystem eine von  $\mathbf{0}$  verschiedene Lösung hat. Das ist genau dann der Fall, wenn der Nullvektor aus der Koeffizientenmatrix herauskommen kann, ohne dass man den Nullvektor hereinsteckt.

Wenn es mehr Unbekannte (und damit Spaltenvektoren links) gibt, als es Gleichungen gibt, ist eine Lösung – falls denn eine existiert – keinesfalls eindeutig bestimmt. Wenn es höchstens so viele Unbekannte wie Gleichungen gibt, ist eine Lösung – falls eine existiert – typischerweise eindeutig bestimmt.

## 5 Kern und Defekt einer Matrix

Die Menge aller Vektoren, die von der Matrix zum Nullvektor gemacht werden, heißt Kern [kernel] der Matrix, in Formeln:  $\text{Ker}(A)$ . Das Gleichungssystem hat also, wenn überhaupt, genau eine Lösung, wenn

12

Die MATLAB<sup>®</sup>-Funktion `null` liefert eine (orthonormale) Basis für den Kern.

Frage am Rand: Was ist der Kern der Matrix  $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ ?

13

Die Zahl der Dimensionen des Kerns einer Matrix heißt Defekt [nullity] der Matrix. Für die Matrix  $B$  von oben gilt also  $\text{nullity}(B) =$  14. Achtung: Der Kern einer Matrix ist eine Menge von Vektoren; der Defekt einer Matrix ist eine nackte Zahl.

Folgende Aussagen besagen also das Gleiche (d. h. sind logisch äquivalent):

- Das Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix  $A$  und der Inhomogenität  $\mathbf{b}$  hat keine Lösung oder genau eine Lösung, aber nicht mehr.
- $A$  macht nur den Nullvektor zum Nullvektor.

- $\text{Ker}(A) =$  15.

- $\text{nullity}(A) =$  16.

## 6 Zusammenfassung: Existenz und Eindeutigkeit

Ist  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix, gehen wir mit  $n$ -komponentigen Vektoren von rechts in die Matrix hinein (Multiplikation Matrix mal Spaltenvektor) und erhalten  $m$ -komponentige Vektoren als Ergebnis. Von den  $n$  Dimensionen der Eingangsvektoren gehen die Dimensionen des Kerns verloren, also muss offensichtlich gelten:

17

Zusammengefasst sieht die Lösbarkeit für  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannte damit so aus:

Situation	Existenz <sup>18</sup>	Eindeutigkeit <sup>19</sup>
$m < n$ : weniger Gl. als Unbek.		
$m = n$ : so viele Gl. wie Unbek.		
$m > n$ : mehr Gl. als Unbek.		

„Weniger Gleichungen als Unbekannte“ heißt auch „unterbestimmt“, „mehr Gleichungen als Unbekannte“ heißt auch „überbestimmt“.