Konvergenzradius. Lösen von Differentialgleichungen mit Potenzreihen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 6. Juni 2010, 19:12
Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.
Videos dazu: http://www.youtube.com/joernloviscach

1 Potenzreihen

Die Entwicklung einer Funktion f an einer Stelle x_0 in eine Taylor-Reihe war:

1

Es stellen sich zwei Fragen:

1. Ergibt diese unendliche lange Summe (Fachbegriff: „Reihe") Sinn? (Dies führt auf den Begriff „Konvergenzradius".)
2. Falls die Reihe Sinn ergibt: Kommt aus ihr wieder die Funktion f heraus? (Dies führt auf den Begriff der „analytischen Funktionen".)

Zur ersten Frage: Die Taylor-Reihe ist eine spezielle Art, eine Potenzreihe zu bilden. Um die erste Frage zu beantworten, kann man einfacher eine allgemeine Potenzreihe untersuchen:

2

Dabei sind die $a_0, a_1, \ldots$ feste Zahlen.

Was soll diese unendlich lange Summe mathematisch bedeuten?

3

Wenn dieser Grenzwert für ein gegebenes x existiert, sagt man: Die Reihe konvergiert für dieses x. Die große Frage ist, für welche x das der Fall ist.

Anschaulich ist klar, dass die Potenzreihe um so mehr zur Explosion neigt, je weiter x von x_0 weg liegt, also je größer $|x - x_0|$ wird. Und in der Tat findet man genau das: Zu jeder Potenzreihe gibt es einen sogenannten Konvergenzradius r, so dass die Reihe für $|x - x_0| < r$ konvergiert und für $|x - x_0| > r$ divergiert (also keinen Grenzwert hat). Genau auf dem Rand, also für $|x - x_0| = r$, kann sie konvergieren oder divergieren, je nach x. Im Prinzip sieht das so aus:

4

Im Fall $r = \infty$ hat man immer Konvergenz, so wie bei den Funktionen exp, sin und cos. Im Fall $r = 0$ kann man nur $x = x_0$ einsetzen, was nicht sehr spannend ist.

Der Begriff Konvergenz*radius* lässt an eine Kreisscheibe denken – und genau darum geht es: Setzt man Zahlen $x \in \mathbb{C}$ in die Potenzreihe ein, ist das Verhalten so:

5

Dass die kritische Grenze genau ein Kreis ist, ist zunächst überraschend.

2 Konvergenz von Potenzreihen

Angenommen, x liegt so dicht bei x_0, dass $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x - x_0| \le 0{,}999$ für alle n gilt. Dann kann man den Betrag des n-ten Summanden der Potenzreihe nach oben abschätzen:

6

Wenn man die Reihe Summand für Summand in $\mathbb{C}$ einzeichnet, ergibt sich damit ein Bild wie dieses, mit mindestens exponentiell schrumpfenden Abständen:

7

Die Reihe wird in diesem Fall also konvergieren. Dasselbe passiert auch mit 0,99999 usw. statt 0,999.

Angenommen dagegen, x liegt so fern von x_0, dass $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0| \geq 1{,}001$ für alle n gilt. Dann kann man den Betrag des n-ten Summanden der Potenzreihe *nach unten* abschätzen:

8

Wenn man die Reihe Summand für Summand in $\mathbb{C}$ einzeichnet, ergibt sich damit ein Bild wie dieses, mit mindestens exponentiell *wachsenden* Abständen:

9

Die Reihe wird in diesem Fall also divergieren. Dasselbe passiert auch mit 1,00001 usw. statt 1,001.

3 Konvergenzradius

Es kommt also nur auf den Betrag $|x-x_0|$ an. Die Grenzlinie zwischen Konvergenz und Divergenz muss deshalb wirklich ein Kreis sein, keine Quadrat oder eine andere Figur. Der Radius dieses Kreises heißt Konvergenzradius r der Potenzreihe.

Im Allgemeinen ist $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0|$ nicht *durchgängig* größer oder kleiner als 1, was die Sache kompliziert macht. Wesentlich ist, ob $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0|$ „meist" kleiner oder aber größer ist als eins. Endlich viele Ausreißer schaden nicht.

Als Trick definiert man den „Limes superior“ $\limsup_{n\to\infty}$, das ist der höchste Häufungspunkt einer Folge – wobei $+\infty$ und $-\infty$ erlaubt sind. Beispiele:

Folge	lim sup
$1;2;3;1;2;3;1;2;3;\dots$	10
$1;10;2;20;3;30;\dots$	11
$0{,}9;0{,}99;0{,}999;0{,}9999;\dots$	12

Dann lässt sich für den Konvergenzradius schreiben:

13

,

wobei ausnahmsweise $1/0 := \infty$ und $1/\infty := 0$ gerechnet wird. Folgende drei Fälle kann man dann unterscheiden:

14

4 Analytische Funktionen

Nun zum zweiten Problem: Angenommen, eine Taylor-Reihe konvergiert für ein gegebenes x. Ist das Ergebnis dann wieder $f(x)$?

Funktionen f, die das erfüllen, heißen analytisch. Jede analytische Funktion muss offensichtlich unendlich oft differenzierbar sein. Das gilt aber nicht umgekehrt: Eine Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist, muss nicht unbedingt analytisch sein. Will sagen: Nicht jede konvergente Taylor-Reihe summiert sich wieder zu der zu Grunde liegenden Funktion f.

Die Ausnahmen sind allerdings exotisch. Hier ist ein Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, \text{ wenn } x \neq 0 \\ 0, \text{ wenn } x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion schmiegt sich bei $x = 0$ extrem stark an die x-Achse: Der Funktionswert und alle Ableitungen sind dort 0. Das sieht etwa so aus:

15

Die Taylor-Reihe dieser Funktion f für $x_0 = 0$ ist deshalb für alle x gleich null – also nicht gleich f. So etwas passiert aber im wahren Leben selten.

5 Lösen von Differentialgleichungen mit Potenzreihen

Für besonders fiese Differentialgleichungen kann man eine Potenzreihe als Ansatz verwenden. Beispiel: $y' = y^2 + x$ mit $y(2) = 3$. Setzen wir also die Lösung y als eine Potenzreihe an der Startstelle $x = 2$ an:

16

17

Die Anfangsbedingung $y(2) = 3$ heißt dann:

Die Potenzreihe setzt man in die Differentialgleichung ein und vergleicht die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von $(x-2)$:

18

Auf diese Weise ist es bei vielen Differentialgleichungen möglich, die ersten Koeffizienten der Reihe auszurechnen. Man kann die Reihe danach abbrechen und hat damit ein Taylor-Polynom als Näherung für die Lösung.

Manchmal findet man sogar eine handliche Formel für *alle* Koeffizienten. Vorsicht: Die damit gebildete Potenzreihe funktioniert aber nur innerhalb ihres Konvergenzradius.