Lösungen 5 (Update)

1. 5 Liter $= 5\ \mathrm{dm}^3 = \pi r^2 \cdot 1\ \mathrm{dm}$, also $r = \sqrt{\frac{5}{\pi}}\ \mathrm{dm}$, so dass der Durchmesser $= 2r \approx 25{,}2$ cm beträgt.

2. Volumen der Cheops-Pyramide $= \frac{1}{3} \cdot 230\ \mathrm{m} \cdot 230\ \mathrm{m} \cdot 140\ \mathrm{m} \approx 2{,}5$ Mio. m^3. Volumen des Aon Center $= 60\ \mathrm{m} \cdot 60\ \mathrm{m} \cdot 346\ \mathrm{m} \approx 1{,}2$ Mio. m^3, also knapp die Hälfte davon.

3. Volumen $= \frac{1}{3} \cdot 53 \cdot 53 \cdot 260\ \mathrm{m}^3$. Das muss etwa die Gesamtfläche aller Etagen mal die Höhe von 4 m sein. Also ist die Gesamtfläche etwa $= \frac{1}{3} \cdot 53 \cdot 53 \cdot 260 \cdot \frac{1}{4}\ \mathrm{m}^2 \approx 6{,}1 \cdot 10^4\ \mathrm{m}^2$. Das sind etwa acht Fußballfelder. Offizielle Angabe: 49.000 m^2.

4. Volumen $= \frac{4}{3}\pi \cdot (40.000/2\pi)^3\ \mathrm{km}^3 \approx 1{,}1 \cdot 10^{21}\ \mathrm{m}^3$. Oberfläche $= 4\pi \cdot (40.000/2\pi)^2\ \mathrm{km}^2 \approx 5{,}1 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^2$.

5. Volumen der Kugelschale = Differenz des äußeren und des inneren Kugelvolumens $= \frac{4}{3}\pi \cdot (40.000/2\pi + 10)^3\ \mathrm{km}^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot (40.000/2\pi)^3\ \mathrm{km}^3 \approx 5{,}1 \cdot 10^{18}\ \mathrm{m}^3$. Das ist ein Würfel mit 1,7 Mio. m, also 1700 km Kantenlänge. Dies ist nur wenig mehr als die Länge der Luftlinie von Bielefeld nach Madrid.

6. Volumen genähert als Fläche mal Tiefe, weil die Tiefe im Verhältnis zum Kugelradius vernachlässigbar klein ist: $\frac{2}{3} \cdot 4\pi \cdot (40.000/2\pi)^2\ \mathrm{km}^2 \cdot 4\ \mathrm{km} \approx 1{,}4 \cdot 10^{18}\ \mathrm{m}^3$. Das ist eine Kugel mit einem Durchmesser von knapp 1400 km. Dies ist etwa die Länge der Luftlinie von Bielefeld nach Neapel.

7. (Fauler Professor)

8. $\|\mathbf{a}\|^2 = \sqrt{2^2 + 3^2} \approx 3{,}6$ und $\|\mathbf{a}\|^2 = \sqrt{5^2 + (-1)^2} \approx 5{,}1$.

9. Zum Beispiel $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Test mit Skalarprodukt!

10. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$. Sanity Check: Die Skalarprodukte des Ergebnisses mit den beiden Faktoren sind null.

11. Der Cosinus des Winkels ist das Skalarprodukt der Vektoren durch das Produkt ihrer Längen. Also ist der Winkel $= \arccos\left(\frac{2\cdot(-1)+3\cdot 5+1\cdot 2}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+5^2+2^2}}\right) \approx 43{,}0°$.

12. Das Vektorprodukt ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix}$. Die Länge davon ist der (Betrag des) Sinus des Winkels mal das Produkt der Länge der beiden Vektoren. Also ist der Winkel $= \arcsin\left(\frac{\sqrt{1^2+(-5)^2+13^2}}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+5^2+2^2}}\right) \approx 43{,}0°$. Vorsicht: Wegen der Mehrdeutigkeit beim Auflösen des Sinus könnte der Winkel allerdings auch 180° minus dies sein.