Mathe II 2011-06-27

1. Geradengl.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

x-Achse: $\ldots \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} 2-x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \to \lambda = -2/3, \quad \to \lambda = -1 \quad \lightning$$

y-Achse: $\ldots \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 \\ 2-y \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \to \lambda = -1, \quad \to \lambda - 1$$

Geht!

z-Achse: $\ldots \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1-z \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \to \lambda = -1, \quad \to \lambda = -2/3 \quad \lightning$$

2. Suche Eigenwerte:

$$0 \overset{!}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) + 0 - 0$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte 2, 3, 4

Eigenvektor zu E.W. 2: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix} = \vec{0}$

Nehme z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\downarrow$

((Auf den hätte man auch ohne Rechnung kommen können.))

Eigenvektor zu E.W. 3: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

Nehme z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

((Oder ein E.V. zum E.W. 4.))

3. $y' = \frac{y^2}{x} \iff y^{-2}y' = \frac{1}{x}$

Trennung der Variablen!

$$\underbrace{\int_3^{y_1} y^{-2}\,dy}_{\underbrace{\left[-y^{-1}\right]_3^{y_1}}_{-\frac{1}{y_1}+\frac{1}{3}}} = \underbrace{\int_2^{x_1} \frac{1}{x}\,dx}_{\ln|x_1| - \ln 2}$$

$$\implies y_1 = \left(\frac{1}{3} - \ln|x_1| + \ln 2\right)^{-1}$$

4. $c_0 = \frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,dt = \frac{1}{3}\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{6}$

$c_2 = \frac{1}{3}\int_0^3 e^{-2\pi i\, 2t/3} f(t)\,dt$

$= \frac{1}{3}\int_0^1 e^{-4\pi i t/3}\, t\,dt$

$\downarrow$

$$\uparrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{e^{-4\pi i t/3}}{-4\pi i/3} \qquad 1$$

$$= \frac{1}{3}\left(\underbrace{\left[\frac{e^{-4\pi i t/3}}{-4\pi i/3}\, t\right]_0^1}_{\frac{e^{-4\pi i/3}}{-4\pi i/3} - 0} - \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-4\pi i t/3}}{-4\pi i/3}\, dt}_{\left[\frac{e^{-4\pi i t/3}}{(-4\pi i/3)^2}\right]_0^1} \right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{3}}\, \frac{e^{-4\pi i/3}}{-4\pi i/\cancel{3}} - \cancel{\frac{1}{3}}\, \frac{e^{-4\pi i/3} - 1}{-16\pi^2/\cancel{9}_{\,3}}$$

$$\left(\left(= e^{-4\pi i/3}\left(\frac{i}{4\pi} + \frac{3}{16\pi^2}\right) - \frac{3}{16\pi^2} \right)\right)$$

5.
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6x - 2y - 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2x + 6y - 10 \end{aligned}\right\} \text{werden beide 0 an } (1|2)$$

Bis dahin ok!

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$$

Hesse-Matrix $= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, unabh. von x, y.

$$\downarrow$$

$\det(\dots) = 36 + 4 > 0$ ✓

links oben $= 6 > 0$,

also beide Eigenwerte > 0,

also lok. Minimum.

6. Integral $= \displaystyle\int_0^{\pi/2} \underbrace{\left(\int_0^3 (r\cos\varphi + 2r\sin\varphi)\, r\,dr \right)}_{\underbrace{\left[\frac{r^3}{3}\cos\varphi + \frac{2}{3} r^3 \sin\varphi \right]_0^3}_{9\cos\varphi + 18\sin\varphi}} d\varphi$

$= \Big[9\sin\varphi - 18\cos\varphi \Big]_0^{\pi/2}$

$= 9 - 0 - 0 + 18 = 27$

7. Es genügt eine 1×3-Matrix!

(3 Dimensionen rein $\begin{cases} \to 2 \text{ in Kern} \\ \to 1 \text{ in Bild} \end{cases}$)

Die eine Zeile dieser Matrix muss $\perp$ auf beiden Richtungsvektoren stehen. Also:

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\5\\-2\end{pmatrix}.$$

Matrix z.B. $\begin{pmatrix}-4 & 5 & -2\end{pmatrix}$.

((Oder, wenn es mehr nach Matrix aussehen soll:

$$\begin{pmatrix}-4 & 5 & -2\\-8 & 10 & -4\end{pmatrix}$$))

8. Ansatz: $y = A\sin(x) + B\cos(x)$

$$\Rightarrow y' = A\cos(x) - B\sin(x)$$
$$\Rightarrow y'' = -A\sin(x) - B\cos(x)$$
$$\Rightarrow y''' = -A\cos(x) + B\sin(x)$$

Einsetzen:

$$-A\cos(x) + B\sin(x) + A\sin(x) + B\cos(x) = \sin(x) \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} A + B &= 1\\ -A + B &= 0\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow A = \tfrac{1}{2} = B$$

Nehme also z.B. $y = \frac{\sin(x)}{2} + \frac{\cos(x)}{2}$

9. Ansatz: $y = e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + a = 0$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - a}$

Allgemeine Lösung:

$y = A e^{\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{\ldots}\right)x} + B e^{\left(-\frac{3}{2} - \sqrt{\ldots}\right)x}$

a darf nicht $> \frac{9}{4}$ sein, sonst wird die Wurzel komplex und man hat Schwingungen.

Für $a \leq 0$ ist $-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - a} \geq 0$, also kein exp. Abfall.

Bleibt: $a \in (0; \frac{9}{4}]$

10. Funktionswert, 1. und 2. Ableitung müssen übereinstimmen:

$$\left.\begin{cases} b e^{x_0} \overset{!}{=} x_0^2 + 1 \\ \left.\begin{aligned} b e^{x_0} &\overset{!}{=} 2x_0 \\ b e^{x_0} &\overset{!}{=} 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0 = 1 \end{cases}\right\} b e^1 = 2$$

$\Downarrow$

$b = \frac{2}{e}$

11. Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{s^5+9s^3} = \frac{1}{s^3(s^2+9)}$$

$$= \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{Ds+E}{s^2+9}$$

$$= \frac{A(s^2+9)+Bs(s^2+9)+Cs^2(s^2+9) + Ds^4 + Es^3}{s^3(s^2+9)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s^0: & 9A = 1 & \Rightarrow A = 1/9 \\ s^1: & 9B = 0 & \Rightarrow B = 0 \\ s^2: & A+9C = 0 & \Rightarrow C = -1/81 \\ s^3: & B+E = 0 & \Rightarrow E = 0 \\ s^4: & C+D = 0 & \Rightarrow D = 1/81 \end{cases}$$

Also ... $= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{s^3} - \frac{1}{81} \frac{1}{s} + \frac{1}{81} \frac{\cancel{1}\, s}{s^2+9}$.

Originalsignal:

$$t \mapsto \frac{1}{18} t^2 - \frac{1}{81} + \frac{1}{81} \cos(3t)$$

12. Die Tangente an die Höhenlinie muss durch (5/16) laufen und $\perp$ zum Gradienten sein!

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sqrt{y}, \quad \text{an } (5/16): \ 10 \cdot 4 = 40$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2\sqrt{y}}, \quad \text{an } (5/16): \ \frac{25}{8}$$

Also Geradengleichung z.B.:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 25/8 \\ -40 \end{pmatrix}$$