1) Bild: Welche Vektoren können aus der Matrix herauskommen?

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Alle paarweise nicht parallel, aber vielleicht in einer Ebene?

Test: Kann man den dritten aus den ersten beiden bilden?

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ 2x + y = 3 \\ 3x - y = 2 \\ 4x + 2y = 6 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array} \right. \checkmark$$

Also ja!

Also kann man alle Ergebnisse aus den ersten beiden Spalten bilden:

$$\text{Bild} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ mit } x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Rang} = \dim(\cdot) = 2$$

2) $\hookrightarrow \text{Defekt} = \underset{\text{Spalten}}{3} - \underset{\text{Rang}}{2} = 1$

$\Rightarrow$ Der Kern ist eine Gerade. Aber welche?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z.B. mit Gaußschem Eliminationsverfahren:

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \end{matrix} \right. \quad \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \quad \cdot(-4)$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{matrix} \right. \quad \cdot 1 \quad \cdot(-2)$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x+z=0 \\ y+z=0 \end{matrix} \right.$$

Also $\text{Kern} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = -z = y \right\}$

$$= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

3) λ ist Eigenwert $\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{}{}^2 = 0$

$$(1-\lambda)^2 - 8 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 8$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 7$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{1+7}$$
$$= 1 \pm \sqrt{8}$$

Sanity checks:

- $(1+\sqrt{8})(1-\sqrt{8}) = 1-8 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ ✓
- $1+\sqrt{8} + 1-\sqrt{8} = 2 = \text{Spur}$ ✓

- Eigenvektor zu $\lambda = 1+\sqrt{8}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-(1+\sqrt{8}) & 2 \\ 4 & 1-(1+\sqrt{8}) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -\sqrt{8} & 2 \\ 4 & -\sqrt{8} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

wähle z.B. $x = 2$

$y = \sqrt{8}$

- Eigenvektor zu $\lambda = 1-\sqrt{8}$:

usw.

wähle z.B. $x = 2$

$y = -\sqrt{8}$