1) 2. Ordnung, linear, inhomogen (!), konst. Koeffizienten, implizit (aber leicht explizit zu machen).

Ansatz: $y(x) = Ax^2 + Bx + C$

$\Rightarrow y'(x) = 2Ax + B$

$\Rightarrow y''(x) = 2A$

Einsetzen: $2A + Ax^2 + Bx + C - x^2 \overset{!}{=} 0 \quad \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A - 1 = 0 \\ B = 0 \\ 2A + C = 0 \end{cases}$$ durch Koeffizientenvergleich

$\Leftrightarrow A = 1 \wedge B = 0 \wedge C = -2$

Also eine spezielle Lösung: $y = x^2 - 2$

2) 2. Ordnung, linear, homogen (!), konst. Koeffizienten, explizit.

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$

$\Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x} \Rightarrow y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

Einsetzen: $\lambda^2 e^{\lambda x} \overset{!}{=} e^{\lambda x} \quad \forall x$

$\Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1$

Allgemeine Lösung: $y = Ae^{x} + Be^{-x}$

3) 1. Ordnung, nichtlinear, trennbare Var.

$$y' \sin(y)\, e^{x} \overset{!}{=} 1 \iff \sin(y)\, y' = e^{-x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_3^{y_1} \sin(y)\, dy}_{\underbrace{\left[-\cos(y)\right]_3^{y_1}}_{-\cos(y_1)+\cos(3)}} = \underbrace{\int_2^{x_1} e^{-x}\, dx}_{\underbrace{\left[-e^{-x}\right]_2^{x_1}}_{-e^{-x_1}+e^{-2}}}$$

$$\Rightarrow \cos(y_1) = \cos(3) + e^{x_1} - e^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = \pm \arccos\left(\cos(3) + e^{x_1} - e^{-2}\right)$$

+ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π

Das gibt Bonuspunkte! ;-)