10
Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 17. April 2011, 14:56

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen in der Vorlesung.
Videos dazu: http://www.j3L7h.de/videos.html

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/ or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

1 Prinzip

Die Trennung der Variablen [separation of variables] ist ein beliebter Trick, um Differentialgleichungen erster Ordnung (und *nur* erster Ordnung) zu lösen, insbesondere auch nichtlineare. Zum Beispiel die Differentialgleichung

$$e^y\, y' \stackrel{!}{=} x^5 \quad \text{mit} \quad y(3) \stackrel{!}{=} 7$$

hat „trennbare“ Variablen [separable variables]: Auf der einen Seite stehen nur y und y', auf der anderen steht nur x. Versuchen wir, beide Seiten vom Startpunkt $(x|y) = (3|7)$ bis zu einem noch unbekannten Endpunkt $(x_1|y_1)$ zu integieren:

1

Das linke Integral vereinfacht sich netterweise wegen der Substitutionsregel:

2

Und es ergibt sich als Lösung:

3

Vorsicht: Das Auflösen nach y_1 kann problematisch sein. Wann zum Beispiel?

Rein formal kann man ohne Substitutionsregel arbeiten, indem man die Differentialgleichung umformt zu

4

und dann auf beiden Seiten von $(x|y) = (3|7)$ bis $(x_1|y_1)$ integriert:

5

Manche Leute verzichten auf die Anfangs- und Endwerte und schreiben unbestimmte Integrale. Aber dann darf man nicht vergessen, eine Integrationskonstante dazuzuschreiben:

6