Mathematik 2

2012-01-30

1) $$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{III.}}{\Longrightarrow} \mu = -1$$

$$\overset{\text{I \& II.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} 0 = 3 + \lambda - 2 \\ 0 = 2 + \lambda - 1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \lambda = -1$$

μ, λ ersetzen : Stimmt!

Also: Ja.

2) $$\text{Flächeninhalt} = \left\| \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix}6\\-3\\-3\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{36+9+9} = \sqrt{54}$$

$$\left(\left(= 3 \cdot \sqrt{6} \right)\right)$$

3) Trennung der Variablen:

$$\sqrt{y+1}\; y' = x^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_3^{y_1} \sqrt{y+1}\, dy}_{\left[\frac{2}{3}(y+1)^{3/2}\right]_3^{y_1}} = \underbrace{\int_2^{x_1} x^2\, dx}_{\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^{x_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}(y_1+1)^{3/2} = \frac{2}{3}\cdot \overbrace{4^{3/2}}^{=8} + \frac{x_1^3}{3} - \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow y_1 = -1 + \left(\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 8 + \frac{x_1^3}{3} - \frac{8}{3}\right)\right)^{2/3}$$

$$\left(\left(= -1 + \left(4 + \frac{x_1^3}{2}\right)^{2/3}\right)\right)$$

4) $$\frac{1}{s^2-4} = \frac{1}{(s-2)(s+2)}$$

$$= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+2}$$

mit $A = \frac{1}{4}$ und $B = -\frac{1}{4}$

Inverse Laplace-Transformation:

$$y(t) = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

5) $$\frac{\partial\sqrt{x^2+y}}{\partial x} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y}} \cdot \cancel{2}x$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\sqrt{9}}_{=3}} \cdot 2 \text{ an } (2|5)$$

$$\frac{\partial\sqrt{x^2+y}}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}$$

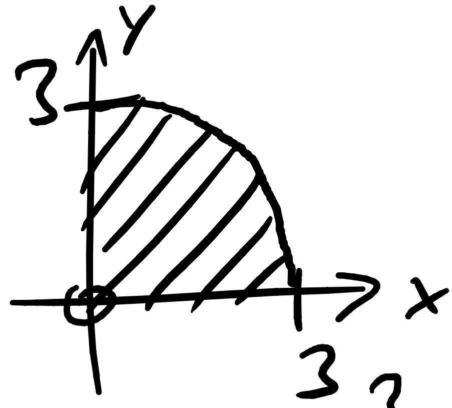
$$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{9}} = \frac{1}{6} \text{ an } (2|5)$$

$\downarrow$

Also $f(2{,}03;\, 4{,}94)$

$$\approx \underbrace{f(2;5)}_{3} + \frac{2}{3} \cdot 0{,}03 + \frac{1}{6} \cdot (-0{,}06)$$

$$= 3 + 0{,}02 - 0{,}01 = 3{,}01$$

6) 

Polarkoordinaten!

$$\text{Integral} = \int_0^3 \left(\int_0^{\pi/2} \underbrace{x}_{r\cos\varphi} \, d\varphi \right) r \, dr$$

$$= \int_0^3 \underbrace{\left(\int_0^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi \right)}_{\left[\sin\varphi\right]_0^{\pi/2} = 1-0} r^2 \, dr$$

$$= \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^3 = 9.$$

7) Mittelsenkrechte zu AB:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Mittelsenkrechte zu BC:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{1}{2}}{7} = -\frac{1}{14}$$

$$\Rightarrow \text{Schnittpunkt} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{14} \\ 2\frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

8) Zum Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9) $f(x) = x \cdot (2 + \sin(x))$

$f'(x) = 2 + \sin(x) + x\cos(x)$

$f''(x) = \cos(x) + \cos(x) - x\sin(x)$

$\Rightarrow f(0) = 0;\ f'(0) = 2;\ f''(0) = 2$

Näherung:

$$0 + 2(x-0) + \cancel{2}\,\frac{(x-0)^2}{\cancel{2}} \overset{!}{=} \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - \frac{1}{10} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{10}}$$

„–" kann nicht sein:
Das x ist zu weit von $x_0 = 0$ weg!

10) Ansatz: $y = e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{4+5}$

$= 2 \pm 3$

$\Leftrightarrow \lambda = 5 \vee \lambda = -1$

Also allg. Lösung:

$y = A e^{5x} + B e^{-x}$

Kann für $x \to \infty$ (im Betrag) exponentiell wachsen ($A \neq 0$) oder exponentiell gegen 0 gehen ($A = 0$).

((Typischerweise also Wachstum.))

11) Ansatz: $y = Ae^x$

Einsetzen: $\underbrace{\cancel{A}e^x - \cancel{A}e^x}_{0} \overset{!}{=} e^x$

$\lightning$

$\downarrow$

Neuer Ansatz: $y = Axe^x$

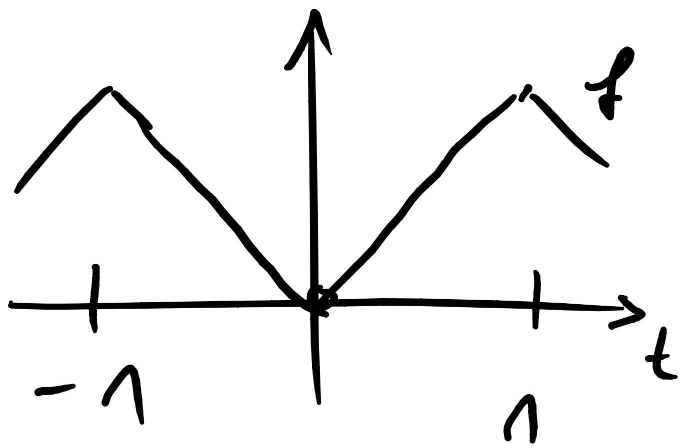
$$y' = Ae^x + Axe^x$$
$$= A(x+1)e^x$$
$$y'' = Ae^x + A(x+1)e^x$$
$$= A(x+2)e^x$$
$$y''' = \ldots = A(x+3)e^x$$

Einsetzen:

$$\underbrace{A(x+3)e^x - Axe^x}_{3Ae^x} \overset{!}{=} e^x$$

Also wähle $A = \frac{1}{3}$.

12)



$c_0 = \frac{1}{2}$ ((offensichtlich!))

$$c_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-\cancel{2}\pi i 2 \frac{t}{\cancel{2}}} f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{0}^{1} e^{-2\pi i t}\, t\, dt + \int_{-1}^{0} e^{-2\pi i t} (-t)\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{e^{-2\pi i t}}{-2\pi i} t \right]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-2\pi i t}}{-2\pi i}\, dt}_{0} + \left[\frac{e^{-2\pi i t}}{-2\pi i} (-t) \right]_{-1}^{0} - \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{e^{-2\pi i t}}{-2\pi i} \cdot (-1)\, dt}_{0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-2\pi i} \cdot 1 - \frac{1}{-2\pi i} \cdot (--1) \right)$$

weil einmal über Periode von $e^{-2\pi i t}$ integriert

$$= 0$$