15
Komposition von Funktionen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 21. September 2013, 15:59

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos:
http://www.j3L7h.de/videos.html

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist

1 Komposition von Funktionen

Die Komposition = Verkettung = Hintereinanderausführung [composition] von Funktionen f und g bedeutet, erst die Funktion g anzuwenden und dann auf deren Ergebnis eine Funktion f anzuwenden. Das ergibt wieder eine Funktion. Die wird $f \circ g$ genannt („f nach g"). Beispiel: $\sin \circ \exp$ bewirkt dies:

1

Man beachte die überraschende Reihenfolge. Die ist typischerweise wichtig: $\exp \circ \sin$ bewirkt etwas Anderes! (Wie kann man das schnell sehen?)

2

Streng müsste man sich hier noch über Definitionsbereiche Gedanken machen: Aus der inneren Funktion darf nichts herauskommen, was die äußere nicht verarbeitet. Also darf man nicht gedankenlos alles Mögliche in die innere Funktion hineinwerfen. Beispiel: Was ist sinnvollerweise der Definitionsbereich von $\sqrt{} \circ \ln$?

3

Verkettete Funktionen treten ständig auf, wenn man nur genau hinsieht: Wie kann man $x \mapsto \frac{1}{(\sin(x))^2+1}$ als Verkettung von Funktionen lesen?

4

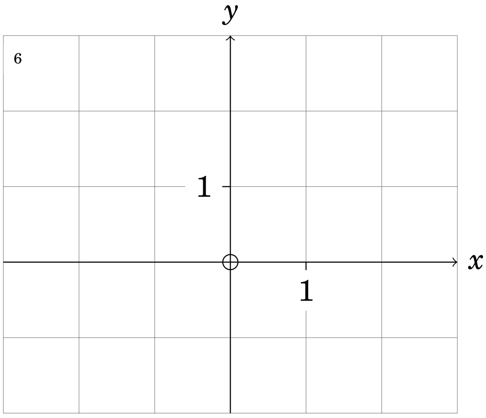
Nebenbei: Die Kettenregel sagt etwas über die Ableitung verketteter Funktionen, nämlich:

5

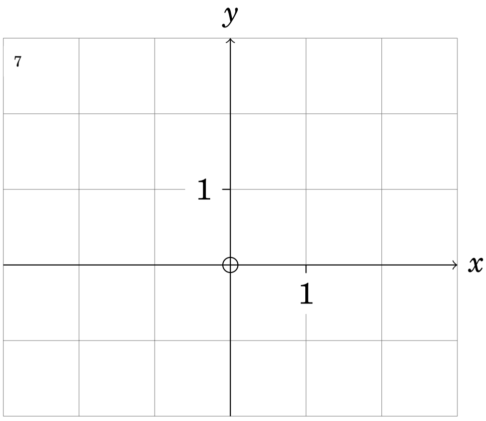
Die Verkettung einer Funktion f mit sich selbst wird oft formal als Potenz geschrieben: $f^4 := f \circ f \circ f \circ f$. (Nicht mit der vierten Ableitung $f'''' = f^{(4)}$ verwechseln!) Wie schon gezeigt, kommt das zum Beispiel bei Iterationsverfahren vor. Die Umkehrfunktion – wenn sie existiert – wirkt hier wie die Potenz -1 und wird deshalb als f^{-1} geschrieben.

2 Vertikale Verschiebung und Streckung von Funktionsgraphen

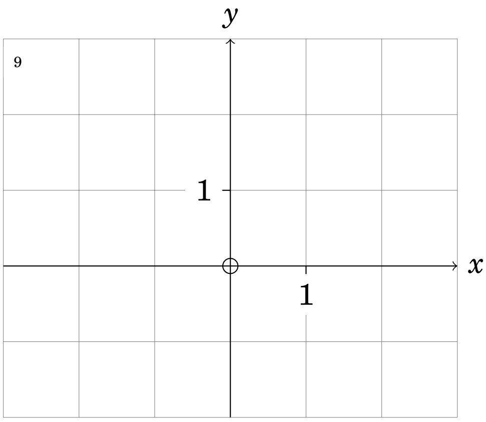
Addiert man zum Funktionswert $f(x)$ eine Konstante, wird der Funktionsgraph vertikal verschoben – nach oben für eine positive Konstante:



Multipliziert man den Funktionswert $f(x)$ mit einer Konstante, wird der Funktionsgraph von der x-Achse weg gestreckt (Konstante > 1), zu ihr hin gestaucht (Konstante zwischen 0 und 1) oder obendrein an der x-Achse gespiegelt (negative Konstante):

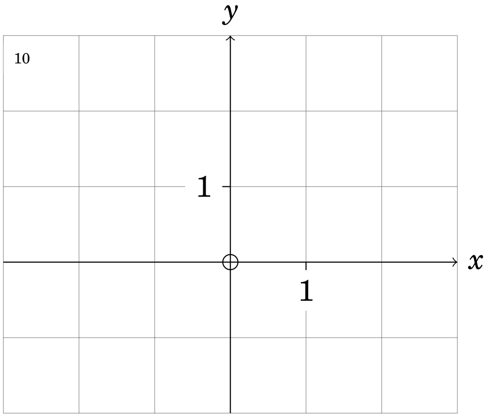


Alles auf einmal erhält man, wenn man eine Funktion $y \mapsto my+b$ mit der Funktion f verkettet, denn dies bedeutet $x \mapsto$ [8] . In dieser Schreibweise wird erst gestreckt/gestaucht/gespiegelt und dann verschoben, alles vertikal.

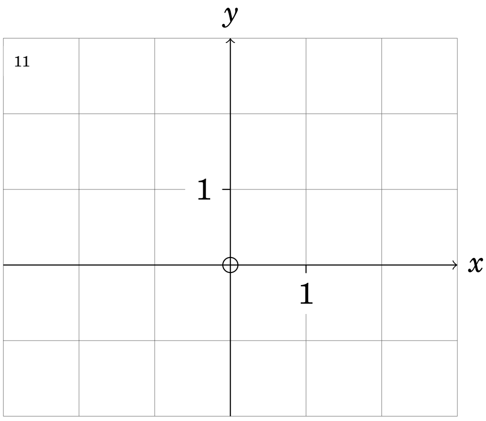


3 Horizontale Verschiebung und Streckung von Funktionsgraphen

Addiert man zu x innerhalb von $f(x)$ eine Konstante, wird der Funktionsgraph horizontal verschoben – nach links (!) für eine positive Konstante:



Multipliziert man x in $f(x)$ mit einer Konstante, wird der Funktionsgraph von der y-Achse weg gestreckt (Konstante zwischen 0 und 1!), zu ihr hin gestaucht (Konstante > 1!) oder obendrein an der y-Achse gespiegelt (negative Konstante):



Vorsicht: Verschiebung und Streckung funktionieren also horizontal genau anders herum als vertikal.

Alles auf einmal erhält man, wenn man f mit einer Funktion $x \mapsto (x-a)/k$ verkettet, denn dies bedeutet $x \mapsto$ 12 . In dieser Schreibweise (Vorsicht, ungewöhnlich!) wird der Graph geometrisch erst gestreckt/gestaucht/gespiegelt und dann verschoben, alles horizontal.