Mathematik 2

2015-10-02

Musterlösungen

1. $$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4-1\\3-1\\2-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1-1\\2-1\\3-1\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \lambda\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\mathrm{I}\\\mathrm{II}\\\mathrm{III}\end{matrix}$$

$\mathrm{I} \Rightarrow \lambda = -1/3$ $\qquad$ $\mathrm{II}: -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1$ ✓

$\mathrm{III} \Rightarrow \mu = -1/3$

Ja, der Ursprung ist enthalten.

2. λ ist E.W. $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{\begin{vmatrix}2-\lambda & 3 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 3\\ 0 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}}$ $= 0$

$$= (2-\lambda)^3 - 3(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\underbrace{\left((2-\lambda)^2 - 3\right)}_{\lambda^2-4\lambda+1}$$

Ein E.W. ist 2.

$\% = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$ Zwei weitere E.W.

3. Trennung der Variablen:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_2^{y_1} \frac{1}{y}\, dy}_{= \left[\ln|y|\right]_2^{y_1}} = \underbrace{\int_3^{x_1} \frac{1}{x+1}\, dx}_{= \left[\ln|x+1|\right]_3^{x_1}}$$

$$\Rightarrow \ln|y_1| = \ln(2) + \ln|x_1+1| - \ln(4)$$

>0 wg. Anfangsbedingung

$$\Rightarrow y_1 = \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{4}_{\,2}}(x_1+1)$$

4. <u>Allg. Lsg. der homogenen Form</u>

$$y'' - y' = 0$$

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1$

$\Rightarrow$ allg. Lsg. der homog. Form:

$$y(x) = Ae^{0x} + Be^{1x} = A + Be^x$$

Spez. Lsg. der inh. Form

$y'' - y' = x$

Ansatz: $y = Dx^2 + Ex + F$

weil kein y links

$\Rightarrow 2D - 2Dx - E = x$

$\Rightarrow D = -\frac{1}{2} \wedge E = -1$, F egal

Allg. Lsg. der urspr. DGL

$y(x) = A + Be^x - \frac{1}{2}x^2 - x$

5. $\dot{y}(t) - 2y(t) = e^{-3t}$

$\Rightarrow sY(s) - 5 - 2Y(s) = \frac{1}{s+3}$

$\Rightarrow Y(s) = \left(\frac{1}{s+3} + 5\right) / (s-2)$

$= \underbrace{\frac{1}{(s+3)(s-2)}}_{\frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-2} \text{ mit } A = -\frac{1}{5}, B = \frac{1}{5}} + \frac{5}{s-2}$

$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{5}e^{-3t} + \left(\frac{1}{5} + 5\right)e^{2t}$

6. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - 16x = x(2y^3 - 16)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 3y^2 = 3y^2(x^2 - 1)$

(1|2) einsetzen: Beides $= 0$, also notwendige Bedingung erfüllt.

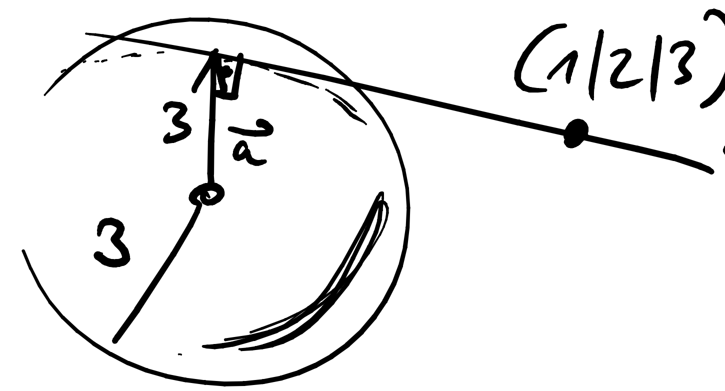
Hesse-Matrix $= \begin{pmatrix} 2y^3 - 16 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6y(x^2-1) \end{pmatrix}$

↳ an (1|2): $\begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 0 \end{pmatrix}$

det $\mathcal{H}$ $= -24^2 < 0$

Kann kein lok. Min/Max sein!

7.



Gerade: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\left(\vec a-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$

$\|\vec a\|=3$

und $\underbrace{\vec a\cdot\left(\vec a-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)}_{=3^2-\vec a\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}=0$

Wähle z.B. $\vec a=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$.

Also Geradengl.: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$

8. Matrix $=\begin{pmatrix}1/\sqrt2 & -1/\sqrt2\\ 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt2 & 1/\sqrt2\\ 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2\end{pmatrix}$

9. Die Zeilenvektoren müssen $\perp$ zu $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ sein.

Nehme z.B. $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$.

Matrix z.B. $\begin{pmatrix}-3 & 6 & -3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

10. $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln(x) = -\frac{1}{x^2}$$

gesuchtes x

$$\ln(e+h) \approx \underbrace{\ln(e)}_{1} + \frac{1}{e}h - \frac{1}{e^2}\frac{h^2}{2}$$

$$\overset{!}{=} \frac{9}{8}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{e}h - \frac{1}{e^2}\frac{h^2}{2} \approx \frac{1}{8}$$

$$\Longrightarrow h^2 - 2eh + \frac{e^2}{4} \approx 0$$

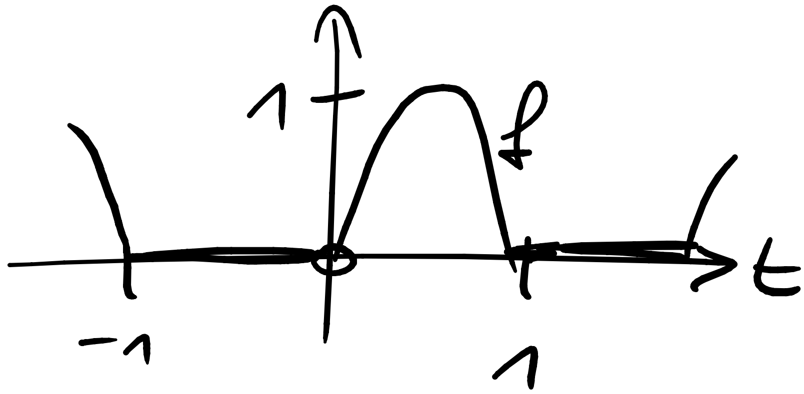
$$\Longrightarrow h \approx e \pm \sqrt{e^2 - \frac{e^2}{4}} = e \pm e \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

muss − sein, damit nahe 0

gesuchte Lösung:

$$x = e + h \approx \underbrace{e + e - e\frac{\sqrt{3}}{2}}_{e\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

11.



$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \sin(\pi t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{2\pi}\left(-\cos(\pi)+\cos(0)\right)$$

$$= \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

$$c_3 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-\cancel{2}\pi i\, 3\cdot\frac{t}{\cancel{2}}} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{-3\pi i t} \sin(\pi t)\,dt$$

$$\sin(\pi t) = \frac{1}{2i}\left(e^{\pi i t} - e^{-\pi i t}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\int_{0}^{1}\left(e^{-2\pi i t} - e^{-4\pi i t}\right)dt$$

$$= 0$$

ganze Zahl an Umdrehungen!

12. Ansatz: $y(t) = e^{\lambda x}$

$$\Longrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{4-13}$$

$$= -2 \pm 3i$$

Also allg. Lsg.:

$$y(t) = A \underbrace{e^{(-2+3i)t}}_{\underbrace{e^{-2t}}_{\text{exponentiell abklingend}}\left(\underbrace{\cos(3t) + i\sin(3t)}_{\text{beschränkt}}\right)} + B \underbrace{e^{(-2-3i)t}}_{\dots\ -\ \dots\ \text{entsprechend}}$$

Ja, alle Lösungen gehen $\to 0$.