12
DGLn höherer Ordnung. Lösung mit Standardsoftware

Jörn Loviscach

Versionsstand: 28. März 2015, 21:29

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos: http://www.j3L7h.de/videos.html

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist

1 Idee

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' + y''y' + \sin(x)y^2 + x^3 = 0.$$

Was für ein Typ an DGL ist das?

1

Was müsste man als Anfangsbedingung zum Beispiel vorgeben?

2

Wie sieht also der Zustandsraum (= Phasenraum) aus?

3

Diese Differentialgleichung kann man – wie jede andere dieser Art – mit einem Trick als Vektor-Differentialgleichung (= DGL-System) *erster* Ordnung schreiben:

4

Programme zum numerischen Lösen von Differentialgleichungen wollen meist genau diese Form haben: explizit, erste Ordnung.

2 Differentialgleichungen mit Software lösen

In Wolfram Alpha tippt man `solve y'+5y=x^2` für die allgemeine Lösung oder `solve y'+5y=x^2 and y(13)=42` für eine spezielle Lösung ein. Wenn Alpha das nicht mehr symbolisch (also mit einer „analytischen" Formel) lösen kann, gibt es eine numerisch berechnete Kurve aus.

MATLAB® schaltet nicht automatisch auf numerische Lösung um. Symbolisch arbeitet `dsolve('Dy+5*y=x^2','x')` für die allgemeine Lösung oder `dsolve('Dy+5*y=x^2','y(13)=42','x')` für eine spezielle Lösung. Das `'x'` am Ende gibt die unabhängige Variable an; ohne diese Angabe ist die unabhängige Variable `t`. Wenn das Programm keine symbolische Lösung findet, liefert es eine leere Antwort. Wie in Wolfram Alpha sind auch Differentialgleichungen höherer Ordnung erlaubt:

```
dsolve('D2x+x=t^3','x(0)=3','Dx(0)=7')
```

Weil hier am Ende keine unabhängige Variable ausdrücklich angegeben ist, nimmt das Programm `t` als unabhängige Variable.

Für die numerische Lösung hat MATLAB® diverse Funktionen, von denen `ode45` die übliche ist. Diese nimmt nur explizite Differentialgleichungen erster Ordnung entgegen. Also muss man umformen. Aus $y' + 5y = x^2$ macht man:

5

Die Eingabe sieht dann so aus:

```
[x,y]=ode45(@(x,y)-5*y+x^2,[13,17],42);
```

Der Ausdruck `@(x,y)-5*y+x^2` ist eine Funktion von x und y, die $-5y+x^2$ berechnet. Die beiden Werte $[13,17]$ geben das erste und das letzte x an, die in der Wertetabelle auftauchen sollen. Die `42` ist der Startwert $y(13)$. Ausgegeben werden zwei Arrays (in diesem Fall `x` und `y`) mit der Wertetabelle. Diese kann man zum Beispiel mit `plot(x,y)` darstellen.

Für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung wird es aufwendiger. Sei die Differentialgleichung $\ddot{x}+0{,}01\dot{x}+0{,}2x=\cos(0{,}1t)$ zum Anfangswert $x(2)=3$, $\dot{x}(2)=1$ zu lösen. Dann muss man diese in ein explizites Differentialgleichungssystem erster Ordnung umwandeln:

6

Einzutippen ist dann:

```
[t,x]=ode45(@(t,x)[x(2);cos(0.1*t)-0.01*x(2)-0.2*x(1)], ...
      [2,1000],[3;1]);
```

Das Array `x` wird nun eine Matrix mit zwei Spalten. In der ersten Spalte stehen die Werte von x, in der zweiten von von $\dot{x}$. Das Ergebnis kann man nun zum Beispiel mit `plot(t,x(:,1),'k',t,x(:,2),'b')` ausgeben.

Ohne die äußere Anregung ergeben sich schöne Phasenplots:

```
[t,x]=ode45(@(t,x)[x(2);-0.01*x(2)-0.2*x(1)],[2,1000],[3;1]);
plot(x(:,1),x(:,2))
```

Vorsicht: An Stellen wie den Differentialgleichungslösern hier sieht man in den Clones von MATLAB® oft andere Schreibweisen.