14
Schmiegeparabel und Freunde, Taylor-Reihe

Jörn Loviscach

Versionsstand: 28. März 2015, 21:29

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos: http://www.j3L7h.de/videos.html

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist

1 Tangentengerade, Schmiegeparabel & Co.

Gegeben sei eine differenzierbare reellwertige Funktion f reeller Zahlen. Dann kann man die Gerade suchen, welche die Funktion an einer Stelle x_0 „unter dem Mikroskop" am besten annähert: die Tangentengerade.

1

Diese Gerade muss durch den Punkt $(x_0|f(x_0))$ laufen und die Steigung der

Funktion dort haben, also die Steigung $f'(x_0)$. Damit ergibt sich als Gleichung der Tangentengerade:

2

Als nächstes kann man die quadratische Parabel suchen, die sich einer zweimal differenzierbaren Funktion f an einer Stelle x_0 „unter dem Mikroskop“ am besten annähert: die Schmiegeparabel.

3

Diese Parabel muss durch den Punkt $(x_0|f(x_0))$ laufen und dort die gleiche Steigung wie die Funktion haben, also die Steigung $f'(x_0)$. Das reicht aber nicht: Auch die Krümmung muss an x_0 stimmen, also soll obendrein die zweite Ableitung der Parabel an x_0 gleich $f''(x_0)$ sein. Also muss die Gleichung der Schmiegeparabel so aussehen:

4

Entsprechend findet man die Formeln für die „unter dem Mikroskop“ beste Näherung durch Polynome dritten und vierten Grades:

5

Es ist offensichtlich, wie diese Konstruktion für Polynome jeden Grads durchzuführen ist (Taylor-Polynome).

2 Anwendung

Oft interessiert von einer Kennlinie oder einer anderen komplizierten Funktion nur die Umgebung des Arbeitspunkts, an dem das System sich typischerweise befindet. Indem man statt der Orginalfunktion die Tangentengerade, Schmiegeparabel usw.

betrachtet, kann man sich die Untersuchungen viel leichter machen. Achtung: Wechselt man den Arbeitspunkt x_0, muss man die Tangentengerade usw. neu bestimmen.

Beispiel: Kubische Näherung der Wurzelfunktion $\sqrt{x}$ für $x \approx 4$:

6

Auf diese Weise ist hier die Wurzelfunktion mit einer im Vergleich zur Wurzelfunktion harmlosen kubischen Parabel genähert. Die Näherung ist allerdings nur in der Umgebung der Zahl 4 brauchbar. Wollte man die Wurzelfunktion anderswo nähern, bräuchte man eine andere Parabel. Außerdem sieht man, dass die Näherung hier wirklich nur unter dem Mikroskop gilt: Wenn man sich nennenswert von 4 entfernt, wird die Näherung extrem schlecht. Demo mit Wolfram Alpha: `series sqrt(x) at x=4 order 3` Wie groß dieser Fehler ist, ist Gegenstand einer der nächsten Vorlesungen.

3 Taylor-Reihe

Formal kann man die Näherung durch Polynome bis ins Unendliche treiben:

7

Dies nennt man die Funktion an x_0 in eine Taylor-Reihe [Taylor series] zu „entwickeln“. Es ist allerdings zunächst unklar, für welche x diese Reihe (=unendlich lange Summe) konvergiert – und ob das Ergebnis dann die Originalfunktion f ist, und zwar exakt und nicht nur als Näherung. Auch das ist Gegenstand einer der nächsten Vorlesungen.

Wenn man eine Funktion tatsächlich in eine Taylor-Reihe „entwickeln“ kann, wird sie damit meist einfach berechenbar. Das beste Beispiel dafür ist die Exponentialfunktion. Wenn man diese an $x_0 = 0$ entwickelt, benötigt man nur den Wert der Exponentialfunktion selbst und aller ihrer Ableitungen an $x_0 = 0$. Mit diesen Werten ergibt sich als Taylor-Reihe folgende Potenzreihe:

8

Um $e^{1/2}$ oder e^{3+4i} in hinreichender Genauigkeit auszurechnen, kann man die ersten fünf bis zehn Summanden dieser Reihe aufaddieren.

In der vorigen Vorlesung hat sich dieselbe Formel für die Exponentialfunktion aus einer Differentialgleichung ergeben. Dies ist ein weiteres großes Einsatzgebiet für Potenzreihen: Sie dienen oft als Ansätze für Differentialgleichungen (siehe Seminar).

Auch von Sinus und Cosinus kann man sofort den Wert der Funktionen selbst und aller ihrer Ableitungen an $x_0 = 0$ angeben. Die Taylor-Reihen sind damit folgende Potenzreihen:

9

Achtung: x ist im Bogenmaß einzusetzen, denn die Ableitungen von Sinus und Cosinus bildet man typischerweise im Bogenmaß!

Betrachtet man nur die ersten n Summanden, erhält man Taylor-Polynome, die sich mehr und mehr um die x-Achse wickeln, um dann steil zu entfliehen. Demo mit WolframAlpha: `series sin(x) at x=0 order 20`

Durch Einsetzen von $x = i\phi$ in die Potenzreihe für die Exponentialfunktion findet man:

10

Dies kann als (wenig anschaulicher) Nachweis der Eulerschen Identität benutzt werden.

Eine weitere wichtige Taylor-Reihe ist die Entwicklung von $1/(1-x)$ an der Stelle $x_0 = 0$. Dazu kann man die Ableitungen dieser Funktion an $x = 0$ bestimmen:

11

Damit ergibt sich folgende Potenzreihe:

12

Einfacher und vielseitig verwendbar ist folgender Trick der „Teleskopsumme“

[telescoping sum]: Man multipliziert versuchsweise $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$ mit $1-x$:

13

Also muss gelten:

14

Das ist für $n \to \infty$ das Ergebnis wie mit der Taylor-Reihe – *wenn* gilt, dass x^n gegen null geht. Wann ist das ok und wann ist das ein Problem?

15