Mathematik 2
vom 2022-01-26
Musterlösungen

1. Der Rang ist 2.
Gleichungssysteme mit dieser Koeffizientenmatrix sind also typischerweise nicht lösbar.

2. $y' = e^y \sin(x)$

$$\Longrightarrow \text{„}e^{-y}\,dy = \sin(x)\,dx\text{"}$$

Also

$$\underbrace{\int_3^{y_1} e^{-y}\,dy}_{\left[-e^{-y}\right]_3^{y_1}} = \underbrace{\int_2^{x_1} \sin(x)\,dx}_{\left[-\cos(x)\right]_2^{x_1}}$$

$$\Longrightarrow -e^{-y_1} + e^{-3} = -\cos(x_1) + \cos(2)$$

$$\Longrightarrow y_1 = -\ln\left(e^{-3} + \cos(x_1) - \cos(2)\right)$$

3. $y' + 2y = \sin(3x)$

linear, inhomogen!

- allg. Lsg. der homog. Form $y'+2y=0$:
  $y = Ae^{-2x}$ ((oder mit Ansatz))
- eine spez. Lsg. der inh. Form:
  Ansatz: $y = B\sin(3x) + C\cos(3x)$

$$\Rightarrow 3B\cos(3x) - 3C\sin(3x) + 2B\sin(3x) + 2C\cos(3x) = \sin(3x)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \begin{cases} 2B - 3C = 1 \\ 3B + 2C = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2}{13},$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-3}{13}$$

- Allg. Lsg. der DGL: $y = Ae^{-2x} + \frac{2}{13}\sin(3x) - \frac{3}{13}\cos(3x)$
- Wähle $A = \left(5 - \frac{2}{13}\sin(12) + \frac{3}{13}\sin(12)\right)\cdot e^{8}$

4. $f(x) = \sin(\sin(x))$

$$f'(x) = \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)$$

$$f''(x) = -\sin(\sin(x)) \cdot (\cos(x))^2 + \cos(\sin(x)) \cdot (-\sin(x))$$

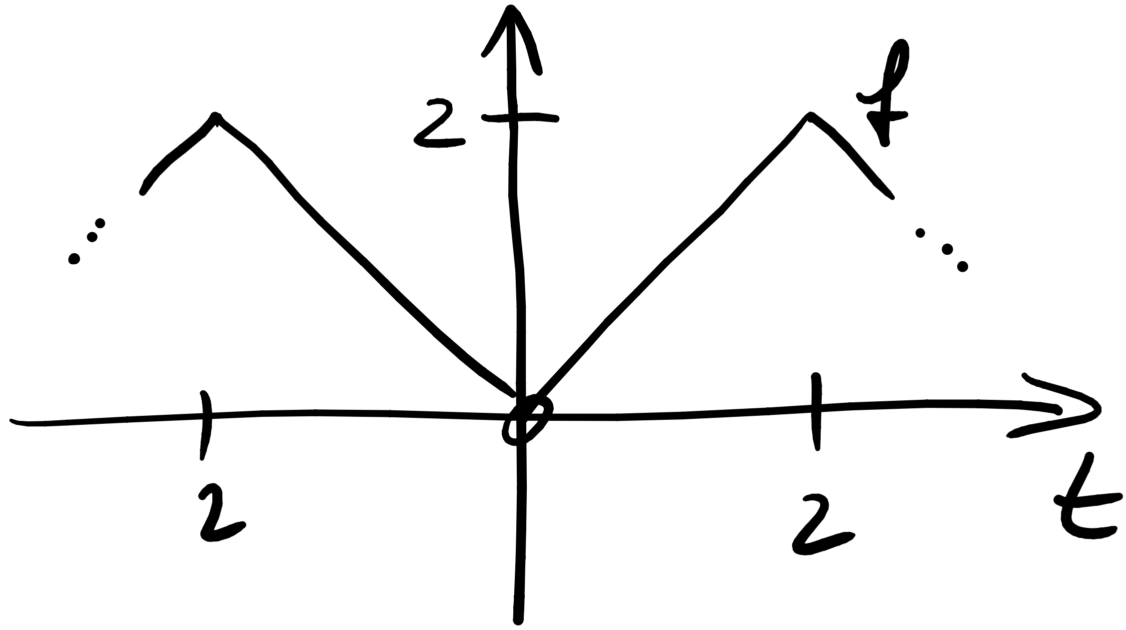
$$f'''(x) = -\cos(\sin(x)) \cdot (\cos(x))^3 - \sin(\sin(x)) \cdot 2\cos(x) \cdot (-\sin(x)) - \sin(\sin(x)) \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x)) + \cos(\sin(x)) \cdot (-\cos(x))$$

Also $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 1$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = -2$.

Also $\sin(\sin(0{,}01)) \approx 0 + 1 \cdot 0{,}01 + 0 \cdot \frac{0{,}01^2}{2} - 2 \cdot \frac{0{,}01^3}{6}$

$$\left(\left(= 0{,}01 - 0{,}000000\overline{3} = 0{,}009999\overline{6}\right)\right).$$

5.



$a_0 = 2 \cdot \text{Gleichanteil} = 2$

$b_0 = 0$, weil f gerade ist.

6. Plausibel ist $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, weil sin bzw. cos dort lokale Maxima haben.

Nachprüfen:

1

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x)\cos(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin(x)\cdot(-\sin(y)) \end{aligned}\right\} \text{ ist beides } = 0 \text{ für } x = \pi/2,\ y = 0$$

für $x = \pi/2$, $y = 0$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x)\cos(y) \quad \Big| \quad -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\cos(x) \cdot \sin(y) \quad \Big| \quad 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin(x)\cos(y) \quad \Big| \quad -1$$

Also ist die Hesse-Matrix an dieser Stelle: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

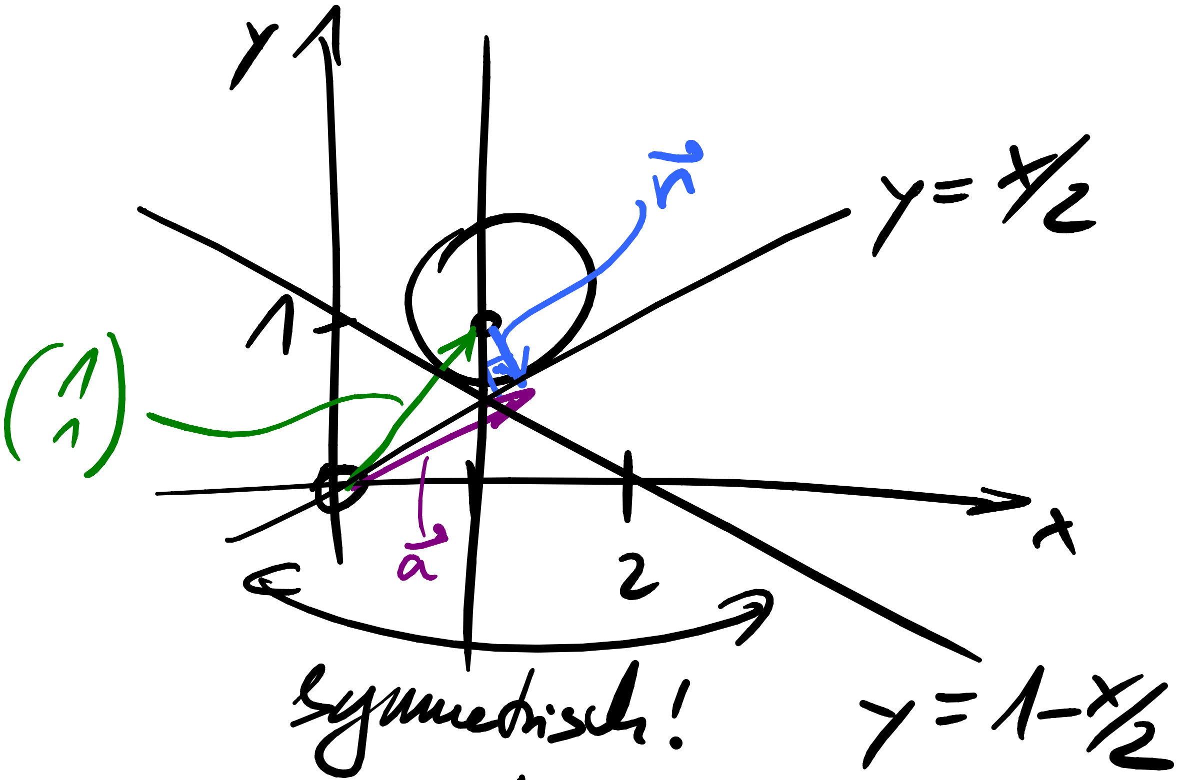
$\det(\ldots) = 1$, links oben < 0.

(2) (3)

(1) & (2) & (3):

hinreichend für lok. Max.

7.



Wähle z.B. Mittelpunkt $= (1|1)$.

Dann ist $\vec{a} = \lambda \binom{2}{1}$, $\vec{r} \cdot \vec{a} = 0$,

$\vec{r} = \mu \binom{1}{-2}$, $\binom{1}{1} + \vec{r} = \vec{a}$.

Also $\binom{1}{1} + \mu \binom{1}{-2} = \lambda \binom{2}{1}$

$\Longrightarrow \lambda \binom{2}{1} + \mu \binom{-1}{2} = \binom{1}{1}$

$\Longrightarrow \mu = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{5}$.

Der Radius ist also

$\|\vec{r}\| = \frac{1}{5} \left\| \binom{1}{-2} \right\| = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

8. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Also $\begin{cases} a + 2b = 0 \Rightarrow a = -2b \\ c + 2d = 0 \Rightarrow c = -2d \\ 3a + 5b = 3 \Rightarrow -6b + 5b = 3 \\ 3c + 5d = 5 \Rightarrow -6d + 5d = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow b = -3, \; d = -5, \; a = 6, \; c = 10$

9. linear, inhomogen!

- allg. Lsg. der homg. Form $y' - 3y = 0$:
  $y = Ae^{3x}$ ((oder per Ansatz))
- eine spez. Lsg. der inh. Form $y' - 3y = e^{3x}$:
  Ansatz 1: $y = Be^{3x}$ ↯
  Ansatz 2: $y = Bxe^{3x} \Rightarrow Be^{3x} \cancel{+ 3Bxe^{3x}} \cancel{- 3Bxe^{3x}} = e^{3x}$
  Also $B = 1$.

↓

- allg. Lsg. der Dgl:
  $y = Ae^{3x} + xe^{3x}$
- Anfangsbed.:
  $0 \stackrel{!}{=} Ae^6 + 2 \cdot e^6$
  Also wähle $A = -2$.

10. $y'' + 6y' + 13y = 0$ linear, homogen, konst. Koeff.

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$

$\Longrightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$

$\Longrightarrow \lambda = -3 \pm \sqrt{9-13}$

$= -3 \pm 2i$

Allg. Lsg.: $y = A\underbrace{e^{(-3+2i)x}}_{e^{-3x}\cdot\text{ oszillierend}} + B\underbrace{e^{(-3-2i)x}}_{\text{"}}$

klingt ab

Ja, alle Lsg.n gehen für $x \to \infty$ gegen 0.

11. Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3}{s^3+s} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s} = \frac{(As+B)s + C(s^2+1)}{(s^2+1)s}$$

$s^3+s = (s^2+1)\cdot s$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} s^0 \\ s^1 \\ s^2 \end{array} \begin{cases} 3 = C \\ 0 = B \\ 0 = A + C \longrightarrow A = -3 \end{cases}$$

Also $\frac{3}{s^3+s} = -3\,\frac{s}{s^2+1} + 3\cdot\frac{1}{s}$.

Rücktransformation:

$y(t) = -3\cos(t) + 3$

12. $|x|+|y|=1$

$\iff x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y = 1-x$

$\vee\ x < 0 \wedge y \geq 0 \wedge y = 1+x$

$\vee\ x \geq 0 \wedge y < 0 \wedge y = -1+x$

$\vee\ x < 0 \wedge y < 0 \wedge y = -1-x$

Also: