Mathematik 2 für Regenerative Energien

Klausur vom 30. September 2022

Jörn Loviscach

Versionsstand: 29. September 2022, 23:56

Drei Punkte pro Aufgabe. Mindestpunktzahl zum Bestehen: 15 Punkte. Hilfsmittel: maximal acht einseitig oder vier beidseitig beschriftete DIN-A4-Spickzettel beliebigen Inhalts, möglichst selbst verfasst oder zusammengestellt; kein Skript, keine andere Formelsammlung, kein Taschenrechner, kein Computer (auch nicht wearable), kein Handy.

Fingerübungen

1. Geben Sie eine 3×3-Matrix an, deren Spaltenraum die Ursprungsgerade mit dem folgenden Richtungsvektor ist:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Lösen Sie dieses Gleichungssystem *streng* mittels Gaußscher Elimination:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + z &= 2 \\ -8y + 5z &= 3 \\ -2y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

3. Lösen Sie $y^2\, y' + x^3 \stackrel{!}{=} 0$ zur Anfangsbedingung $y(5) \stackrel{!}{=} 7$.

4. Bestimmen Sie eine spezielle Lösung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) + 7x(t) \stackrel{!}{=} \sin(3t)$.

5. Schätzen Sie $\sin(\ln(1{,}02))$, indem Sie die Funktion $x \mapsto \sin(\ln(x))$ an der Stelle $x_0 = 1$ quadratisch nähern.

6. Geben Sie die Funktion an, deren Laplace-Transformierte gleich $\frac{1}{s^3+16s}$ ist.

Bitte wenden!

Kreative Anwendung

7. Im $\mathbb{R}^2$ ist der Kreis mit Radius 2 um den Ursprung gegeben. Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung einer Geraden, die eine Tangente an den Kreis ist und durch den Punkt (5|0) verläuft.

8. Jeder Ortsvektor des $\mathbb{R}^2$ soll erst gegen den Uhrzeigersinn um 45° um den Ursprung gedreht werden und danach an der y-Achse gespiegelt werden. Geben Sie die Einträge der Matrix M an, so dass

$$\mathbf{x}_{\text{danach}} = M\mathbf{x}_{\text{original}}.$$

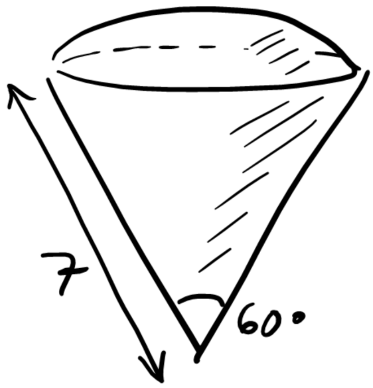
9. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und dazu jeweils einen Eigenvektor dieser Matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten c_0 und c_3 für die Funktion f, welche die Periode 3 hat, für $t \in [0;2)$ gleich t ist und für $t \in [2;3)$ gleich 2 ist.

11. Geben Sie eine Rechenvorschrift $f(x,y)$ für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, deren Gradient an jeder Stelle $(x|y)$ gleich $\begin{pmatrix} 2y\,e^{2x} \\ e^{2x} + 3y^2 \end{pmatrix}$ ist.

12. Aus einer Vollkugel mit Radius 7 bildet man einen Kugelsektor mit einem Öffnungswinkel von 60°. Berechnen Sie das Volumen dieses Kugelsektors.



Hier stehen automatisch Name und Matrikelnummer.