Mathematik I

Klausur vom 2023-03-21

Musterlösungen

1. $\log_2(3^x - 7) = 4 \iff 3^x - 7 = 2^4 = 16$

$\iff 3^x = 23 \iff x = \log_3(23)$

2. $\underbrace{z^3 + 7z}_{z \cdot (z^2 + 7)} = 0 \iff z = 0 + 0i$

$\vee\ z = 0 + \sqrt{7}\,i$

$\vee\ z = 0 - \sqrt{7}\,i$

3x

3. $\frac{d}{dx}\left(\ln(x) \cdot \sin(x^4+1)\right) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x^4+1)$

$+ \ln(x) \cdot \cos(x^4+1) \cdot 4x^3$

4. Lange Begründung über 1. und 2. Ableitung.

Kurze Begründung: x^2+3 ist immer ≥ 3, also immer positiv. x^2+3 hat ein lokales (und globales) Minimum bei $x = 0$ und hat kein lokales Maximum. $\frac{1}{x^2+3}$ hat also ein lok. <u>Max.</u> bei $x = 0$ und <u>kein</u> lok. Min.

5. $$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\left(1+\sin(x)\right)dx = \int_{x=0}^{x=\pi/2} (1+u)\,du \qquad x=\pi/2 \to u=1, \quad x=0 \to u=0$$

$$u = \sin(x)$$

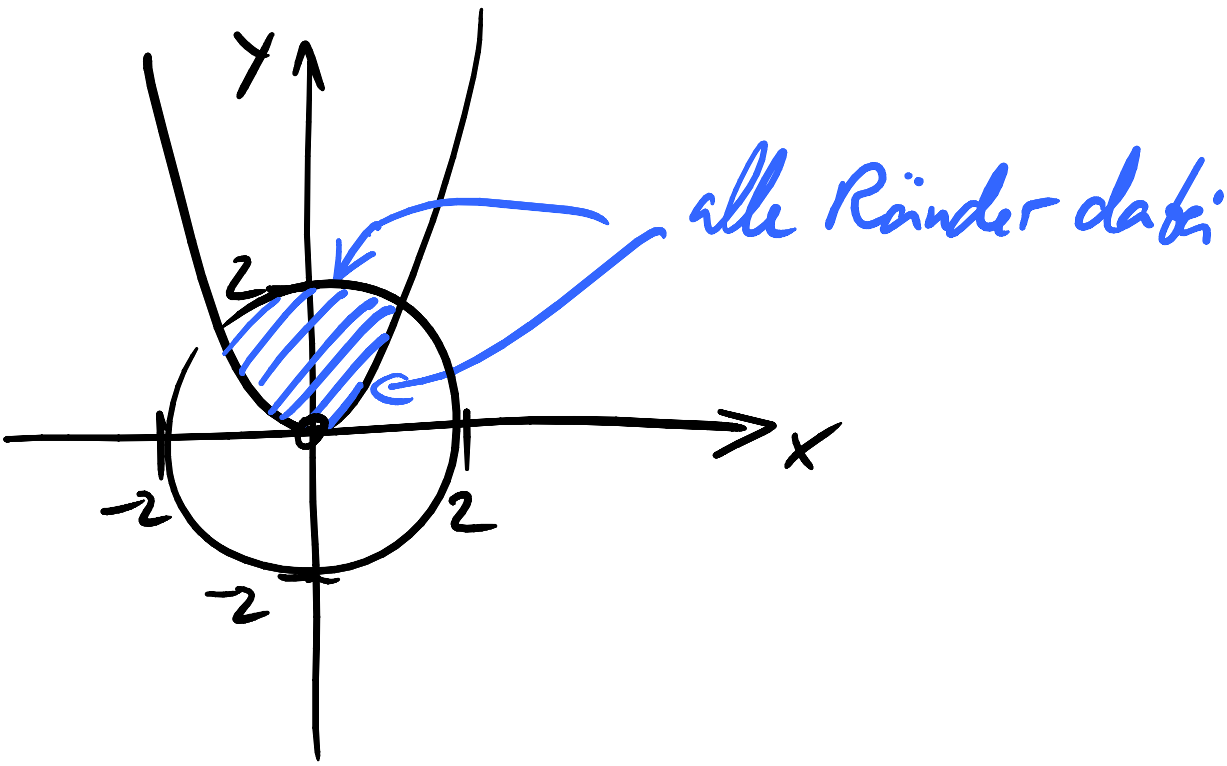
$$\frac{du}{dx} = \cos(x) \Rightarrow du = \cos(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (1+u)\,du = \left[u + \frac{u^2}{2}\right]_0^1 = 1\tfrac{1}{2}$$

6. $$P = \binom{10}{3} \cdot P(\{\text{gerade Zahl}\})^3 \cdot P(\{\text{ungerade Zahl}\})^7$$

$$\left(= \frac{10 \cdot \cancel{9}^{\,3} \cdot \cancel{8}^{\,4}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{120}{1024} \approx 12\% \right)$$

7.



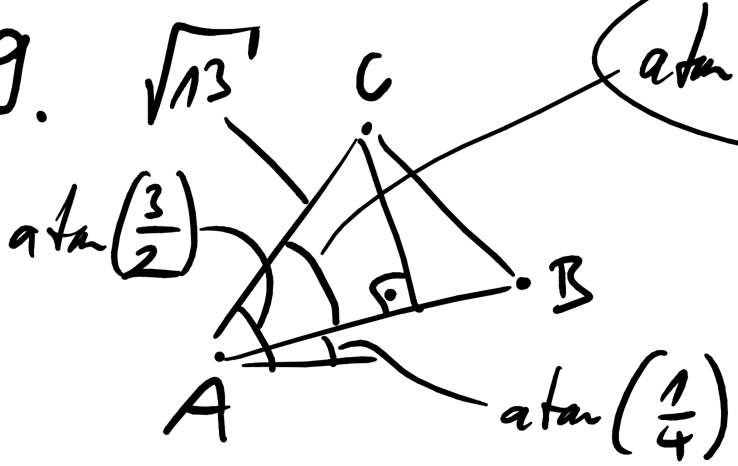
8. Zum Beispiel:

$$y = \frac{(x-4)\cdot 7x}{(x-2)(x-3)}$$

((Polstellen und Nullstelle sind offensichtlich wie gewünscht. Polynomdivision für Asymptote: $(x-4)\cdot 7x : (x-2)(x-3)$

$= (7x^2 + \dots) : (x^2 + \dots) = 7$ ✓))

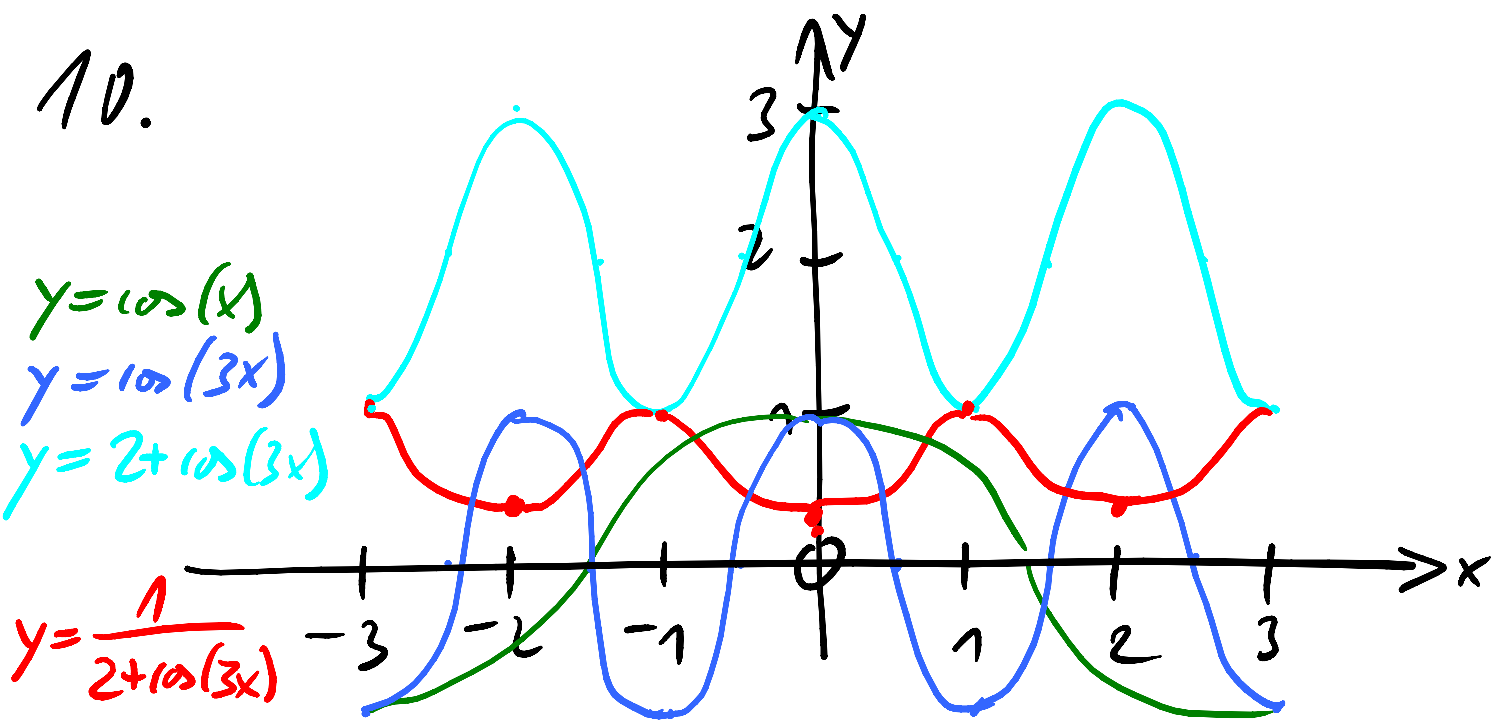
9.



Länge der Höhe $=$

$\sqrt{13}\cdot \sin(\ \div\ )$

10.



11. Wo schneiden sich Parabel und Grade?

$$x^2 - 4x + 4 \overset{!}{=} 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1$$

Also Flächeninhalt =

$$\int_1^5 \left(2x - 1 - (x^2 - 4x + 4)\right) dx$$

Grade liegt <u>über</u> Parabel!

$$= \int_1^5 \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_1^5$$

$$= -\frac{125}{3} + 75 - 25 + \frac{1}{3} - 3 + 5$$

$$\left(= -\frac{124}{3} + 52 = 10\frac{2}{3} \right)$$

12.