Mathematik 2 für Regenerative Energien

Klausur vom 6. Oktober 2023

Jörn Loviscach

Versionsstand: 5. Oktober 2023, 22:53

Drei Punkte pro Aufgabe. Mindestpunktzahl zum Bestehen: 15 Punkte. Hilfsmittel: maximal acht einseitig oder vier beidseitig beschriftete DIN-A4-Spickzettel beliebigen Inhalts, möglichst selbst verfasst oder zusammengestellt; kein Skript, keine andere Formelsammlung, kein Taschenrechner, kein Computer (auch nicht wearable), kein Handy.

Fingerübungen

1. Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$.

   (Formel für Taschenrechner genügt)

2. Geben Sie den Spaltenraum (also das Bild) und den Rang der folgenden Matrix an:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Lösen Sie streng (!) mittels Gaußschem Eliminationsverfahren:
$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ 2x-z &= 2 \\ 3y+2z &= 4 \\ x+3y+z &= 5 \end{aligned}$$

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' - 3y \stackrel{!}{=} e^{2x}$.

5. Lösen Sie die Differentialgleichung $y' \stackrel{!}{=} \frac{\cos(x)}{3y}$ zur Anfangsbedingung $y(4) \stackrel{!}{=} 5$.

6. Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten c_0 und c_2 der Funktion f, welche die Periode 5 hat, für $t \in [0;3)$ gleich t ist und für $t \in [3;5)$ gleich 3 ist.

Bitte wenden!

Kreative Anwendung

7. Geben Sie eine Gleichung der Ebene im $\mathbb{R}^3$ an, die parallel zur Ebene

$$2x - y + 3z = 6$$

ist und durch den Punkt (1|2|1) verläuft.

8. Hat diese Matrix den Eigenwert 7 oder aber nicht? Begründen Sie rechnerisch!

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Schreiben Sie eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung hin, für die sowohl $y_1(x) = \sin(3x)$ als auch $y_2(x) = \cos(3x)$ Lösungen sind.

10. Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $Y(s)$ von $y(t)$ aus der Differentialgleichung $\dot{y}(t) + 7y(t) \overset{!}{=} 5\sin(3t)$ mit der Anfangsbedingung $y(0) \overset{!}{=} 10$.

11. Die Funktion $f(x, y, z) = x + y^2 z^3$ ist gegeben. Schätzen Sie $f(3{,}01; 2{,}02; 0{,}99)$ durch lineare Näherung von f an der Stelle (3|2|1).

12. An welchen Stellen $(x|y) \in \mathbb{R}^2$ hat die Funktion $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2$ ein lokales Minimum oder aber ein lokales Maximum? Begründen Sie Ihre Antwort mit den ersten und zweiten Ableitungen.