Mathematik 1 für Regenerative Energien

Klausur vom 17. Juli 2024: Lösungen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 16. Juli 2024, 12:39

Lösungen von Claude 3.5 Sonnet, korrigiert von Jörn Loviscach

1. Lösung der Gleichung $\log_3(2^{x-1}+4) = 2$:

$$\begin{aligned} \log_3(2^{x-1}+4) &= 2 \\ 2^{x-1}+4 &= 3^2 = 9 \\ 2^{x-1} &= 5 \\ x-1 &= \log_2(5) \\ x &= \log_2(5)+1 \end{aligned}$$

   Die Lösung ist $x = \log_2(5)+1$.

2. Lösung der Gleichung $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$:

   Setzen wir $w = z^2$, dann erhalten wir die quadratische Gleichung: $w^2 + 4w + 3 = 0$.

   Die Lösungen dieser Gleichung sind:

   schöner: $-2 \pm \sqrt{4-3}$

$$w = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = -2 \pm \sqrt{1} = -2 \pm 1$$

   Also $w_1 = -3$ und $w_2 = -1$.

   Für $z^2 = -3$ erhalten wir $z = \pm i\sqrt{3}$. Für $z^2 = -1$ erhalten wir $z = \pm i$.

   Die Lösungen sind also: $z_1 = i\sqrt{3}$, $z_2 = -i\sqrt{3}$, $z_3 = i$, $z_4 = -i$.

   0+ 0+ 0+ 0+

3. Bestimmung der Parabelgleichung:

   Die allgemeine Form einer Parabel ist $y = a(x-p)^2 + q$, wobei $(p|q)$ der Scheitelpunkt ist. Oder mit Ableitung: $2ax+b=0$ am Scheitel,

   Mit dem gegebenen Scheitelpunkt $(2|-1)$ haben wir: $y = a(x-2)^2 - 1$

   also $2a\cdot 2 + b = 0$
   $\wedge\ a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = -1$ $\Big\} \Rightarrow b+c=-1$ $\Rightarrow a=1$
   $\wedge\ a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 3 \Rightarrow c = 3$ $\Rightarrow b=-4$

Nun nutzen wir den Punkt (0|3):

$$\begin{aligned} 3 &= a(0-2)^2 - 1 \\ 4 &= 4a \\ a &= 1 \end{aligned}$$

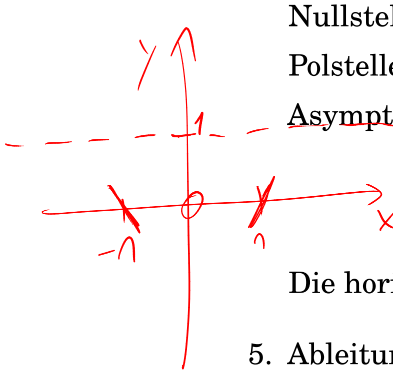
Die Gleichung der Parabel ist also: $y = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$

4. Analyse der Funktion $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$:

   Nullstellen: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

   Polstellen: $x^2 + 1 = 0$ hat keine reellen Lösungen, also keine reellen Polstellen.

   Kann f haben (✓)



   Asymptote für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

   $\to 0$ $\to 0$

   Die horizontale Asymptote ist also $y = 1$.

5. Ableitung von $f(x) = \left(\frac{\ln(x^2+1)}{e^x}\right)^2$:

   Wir verwenden die Kettenregel und die Produktregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \frac{\ln(x^2+1)}{e^x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{e^x}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{\ln(x^2+1)}{e^x} \cdot \left(\frac{e^x \cdot \frac{2x}{x^2+1} - \ln(x^2+1)\cdot e^x}{(e^x)^2}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{\ln(x^2+1)}{e^x} \cdot \left(\frac{2x}{(x^2+1)e^x} - \frac{\ln(x^2+1)}{e^x}\right) \end{aligned}$$

6. Wahrscheinlichkeitsberechnung:

   Die Wahrscheinlichkeit ist:

$$\begin{aligned} P(\text{rot, blau, grün}) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{3\cdot 8} \\ &= \frac{30}{720} = \frac{1}{24} (\approx 0{,}0417) \end{aligned}$$

7. Lösung der Ungleichung $\frac{x-2}{x+1} \geq \frac{x-1}{x+2}$:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x+1} &\geq \frac{x-1}{x+2} \\ (x-2)(x+2) &\geq (x-1)(x+1) \\ \cancel{x^2 + 2x - 4 - 2x} &\cancel{\geq x^2 + x - 1 - x} \\ x^2 - \cancel{2x} - 4 &\geq x^2 - 1 \\ -\cancel{2x} - 3 &\geq 0 \\ \cancel{-2x} &\cancel{\geq 3} \\ \cancel{x} &\cancel{\leq \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

wenn $x+1>0 \wedge x+2>0 \vee x+1<0 \wedge x+2<0$

nie erfüllt

Also Ungl. $\Longleftrightarrow$ $x+1<0 \wedge x+2>0 \vee x+1>0 \wedge x+2<0$ $\Longleftrightarrow -2<x<-1 \vee$ falsch

wenn $x+1<0 \wedge x+2>0 \vee x+1>0 \wedge x+2<0$: $\cancel{x^2}-4 \leq \cancel{x^2}-1$ immer erfüllt

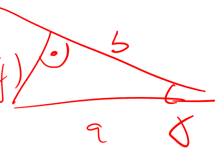
$\mathbb{L} = (-2;-1)$

f ~~Die Lösung ist $x < -\frac{3}{2}$, wobei $x \neq -1$ und $x \neq -2$ ausgeschlossen sind.~~

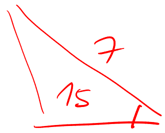
8. Winkelberechnung im Dreieck:

   Wir verwenden die Flächenformel $A = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$, wobei γ der gesuchte Winkel ist. ✓

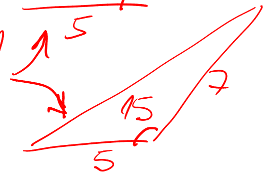
   Herleitung: $a\sin(\gamma)$

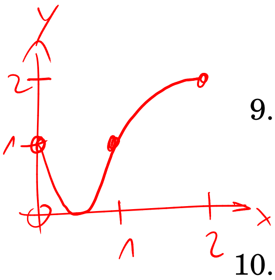


$$\begin{aligned} 15 &= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 7\cdot \sin(\gamma) \quad ✓ \\ \sin(\gamma) &= \frac{2\cdot \cancel{15}^{3}}{\cancel{5}\cdot 7} = \frac{6}{7} \quad ✓ \\ \gamma &= \arcsin(\frac{6}{7}) (\approx 59{,}0^\circ) \end{aligned}$$



f ~~Der Winkel ist eindeutig bestimmt.~~ $180° - \gamma$ geht auch!





9. Skizze der Funktion $f(x) = \sin(\pi \cdot 2^{1-x}) + 1$ auf $[0;2]$:

   Die Funktion oszilliert zwischen 0 und 2, ~~wobei die Frequenz mit zunehmendem x abnimmt. Bei x=1 hat die Funktion eine Periode von 2π.~~ f

   Eine Funktion ist periodisch oder nicht. Diese ist es nicht!

10. Grenzwert ~~von~~ $\lim_{x\to 0} \frac{e^{7x} - \sin(2x) - 1}{4x}$:

    Wir können die Regel von l'Hôpital anwenden:
    (weil für $x=0$ dort $\frac{1-0-1}{0} = \frac{0}{0}$ steht)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{7x} - \sin(2x) - 1}{4x} &= \lim_{x\to 0} \frac{7e^{7x} - 2\cos(2x)}{4} \\ &= \frac{7-2}{4} = \frac{5}{4} \quad ✓ \end{aligned}$$

    Der Grenzwert existiert und ist gleich $\frac{5}{4}$. ✓

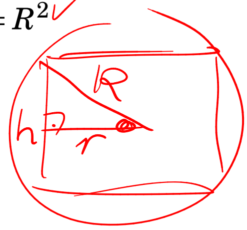
11. Maximales Volumen eines in eine Kugel eingeschriebenen Zylinders:

    Sei(en) r der Radius und h die Höhe des Zylinders. Das Volumen ist $V = \pi r^2 h$. ✓ In einem rechtwinkligen Dreieck mit Radius der Kugel R gilt: $r^2 + (\frac{h}{2})^2 = R^2$ ✓

    ~~Daraus folgt: $r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$~~ egal

    Das Volumen als Funktion von h ist: $V(h) = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h$ ✓ mit $0 \leq h \leq 2R$

    Skizze sinnvoll:



    Wir maximieren diese Funktion: $V'(h) = \pi(R^2 - \frac{3h^2}{4}) = 0$ ✓

    Daraus folgt: $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ ✓

    Für R = 10 ergibt sich $h = \frac{20}{\sqrt{3}} (\approx 11{,}55)$ ✓

    (offensichtlich gibt es kein Randmaximum!)

12. Berechnung des Integrals $\int_1^7 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$:

    Wir substituieren $u = x^2 - 1$, $du = 2xdx$:

$$
\begin{aligned}
\int_1^7 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx &= \int_0^{48} \frac{1}{2\sqrt{u}}du \\
&= [\sqrt{u}]_0^{48} \\
&= \sqrt{48}-0 \\
&= 4\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis ist $4\sqrt{3}$.