Wind- und Wasserkraft

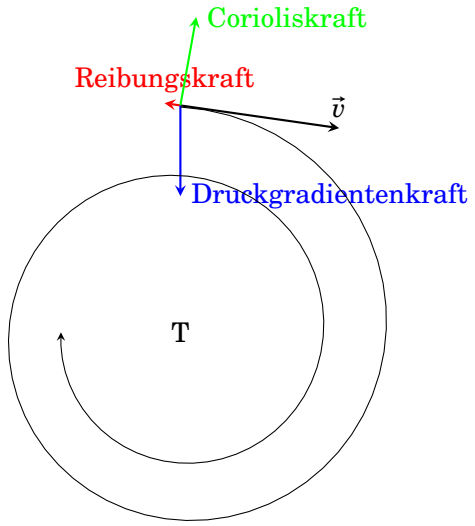
B. Eng. Regenerative Energien / Elektrotechnik
Klausur vom 27. Januar 2025: Musterlösungen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 13. Februar 2025, 10:35

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/ or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Anmerkungen und die in der Klausur nicht verlangten Zahlenergebnisse sind kursiv gesetzt. Diese Lösungen sind größtenteils von ChatGPT 4o bzw. o1 geschrieben und von Jörn Loviscach korrigiert und redigiert.

1. 

   Es ist auch eine Zentripetalkraft nötig (das Negative der gefühlten Zentrifugalkraft), um die Luft auf diese gekrümmte Bahn zu bringen. Die Druckgradientenkraft muss in der Situation hier also stärker als die Corioliskraft sein. Je kleiner der Bahnradius und je höher die Geschwindigkeit, desto weniger lässt sich das – wie hier in der Skizze gemacht – vernachlässigen.

2. Eine Maßnahme ist die Anpassung der Betriebsweise, etwa durch reduzierte Leistung in Zeiten hoher Geräuschempfindlichkeit. Zudem verringern Serrations – spezielle gezackte Kanten an den Rotorblättern – die Lärmentwicklung. Die Geräuschemissionen von Windenergieanlagen können auch durch den Einsatz von Rotoren mit mehr Blättern reduziert werden, da sich so die Drehzahl und damit die Geschwindigkeit der Rotorblätter verringert.

3. Da die gegebene Breite von 23° nahe am Wendekreis liegt, ist der Sonnenstand zur Mittagszeit des 21. Juni nahezu senkrecht über der Windturbine. Sie wirft allenfalls einen sehr kurzen Schatten – je nach exaktem Breitengrad nach Norden oder Süden.

4. Die potenzielle Energie E des Wassers im Oberbecken ist gegeben durch $E = mgh_{\text{eff}}$ mit

   - $E = 10\,\text{GWh} = 10 \cdot 10^9 \cdot 3600\,\text{J} = 3{,}6 \cdot 10^{13}\,\text{J}$,
   - $g \approx 9{,}81\,\text{m/s}^2$,
   - effektive Höhe (Schwerpunkt!): $h_{\text{eff}} = 300 - \frac{50}{2} = 275\,\text{m}$.

   Die Masse m des Wassers ist $m = \rho V$ mit $V = Ad$, wobei $\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$ die Dichte von Wasser und $d = 50\,\text{m}$ die Wassertiefe ist. Damit gilt $E = \rho A d g h_{\text{eff}}$. Umstellen nach A und Einsetzen der Werte:

   $$A = \frac{3{,}6 \cdot 10^{13}\,\text{J}}{1000\,\text{kg/m}^3 \cdot 50\,\text{m} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 275\,\text{m}}$$

   Das sind etwa 27 ha.

5. Wir verwenden die Bernoulli-Gleichung zwischen zwei Punkten der Strömung:

   $$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2,$$

   also

   $$p_2 = p_1 + \rho\left(g(z_1 - z_2) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)\right).$$

   Gegeben:

   - Querschnitt der Druckleitung: $A = 3\,\text{m}^2$ (irrelevant für den Druck, aber gegeben),
   - Strömungsgeschwindigkeit: $v_2 = 2\,\text{m/s}$,
   - Höhe des Oberwasserspiegels: $z_1 = 0$ (als Referenzhöhe gewählt),
   - Höhe der betrachteten Stelle: $z_2 = -500\,\text{m}$ *(dies könnte man alternativ als Referenzhöhe wählen)*,
   - Dichte von Wasser: $\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$,
   - Erdbeschleunigung: $g \approx 9{,}81\,\text{m/s}^2$,
   - atmosphärischer Druck am Oberwasserspiegel: $p_1 \approx 10^5\,\text{Pa}$,
   - Vernachlässigung der Geschwindigkeit am Oberwasserspiegel: $v_1 \approx 0\,\text{m/s}$.

   Einsetzen:

   $$p_2 \approx 10^5\,\text{Pa} + 1000\,\text{kg/m}^3 \cdot \left(9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 500\,\text{m} - \frac{1}{2} \cdot 4\,\text{m}^2/\text{s}^2\right).$$

   Das sind etwa 50 bar (inklusive Atmosphärendruck). Nebenbei sieht man, dass in dieser Situation die Geschwindigkeit des Wassers nicht mit einer im Vergleich nennenswerten Druckverringerung einhergeht.

6. Da in einem Zehntel des Jahres die Energieproduktion gleich null ist, kann der Jahresenergieertrag höchstens 90 % seines theoretischen Maximums betragen. Entsprechend ist die Zahl der Volllaststunden maximal $0{,}9 \cdot 8760 = 8760 - 876 = 7884$. Ebenso kann der Kapazitätsfaktor maximal 90 % betragen.

7. Gegeben:

   - Gleitzahl: $G = 25$,
   - Masse: $m = 500\,\mathrm{kg}$,
   - Geschwindigkeit: $v = 100\,\mathrm{km/h} = \frac{100 \cdot 1000}{3600}\,\mathrm{m/s}$,
   - Erdbeschleunigung: $g \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

   Die Auftriebskraft muss die Schwerkraft mg aufheben. Der Strömungswiderstand F_W ist das $1/G$-Fache dieser Auftriebskraft. Die erforderliche Leistung überwindet den Strömungswiderstand:

   $$P = F_\mathrm{W} v = \frac{mg}{G} v = \frac{500\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot \frac{100 \cdot 1000}{3600}\,\mathrm{m/s}}{25}.$$

   Das sind etwas mehr als 5 kW. Interessant ist der Vergleich mit einem Auto!

8. *Extrem ausführlich geschrieben:* Die kinetische Energie eines Luftpakets ist proportional zum Quadrat seiner Strömungsgeschwindigkeit. Bei den gegebenen Windgeschwindigkeiten entnimmt die Turbine also den Anteil

   $$1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

   der Energie jedes Luftpakets.

   Allerdings vergleicht der Leistungsbeiwert von Windturbinen die gewonnene Leistung mit dem Energiestrom der ungehinderten (!) Strömung durch die Rotorkreisfläche. In der gegebenen Situation kommen die Luftpakete aber mit einer verringerten Geschwindigkeit von $\frac{3}{4}v$ in der Rotorkreisscheibe an. Nur im Vorlauf strömen sie mit voller Geschwindigkeit v, aber dann durch eine Kreisscheibe, deren Fläche gemäß Kontinuitätsgleichung das $\frac{3}{4}$-Fache der Rotorkreisfläche ist.

   So ergibt sich, dass die Turbine letztlich nur

   $$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

   der Leistung entnehmen kann, die der ungestörte Wind durch die Rotorkreisscheibe transportieren würde. Dieser Wert ist der entsprechende Leistungsbeiwert im Sinne von Betz in dieser Situation.

9. Das Potenzgesetz für das Windprofil lautet

   $$v(h) = C \cdot h^\alpha$$

mit einer noch unbekannten Konstante C. Einsetzen der gegebenen Werte ergibt

$$10\,\mathrm{m/s} = C \cdot (100\,\mathrm{m})^{\alpha}$$

und

$$12\,\mathrm{m/s} = C \cdot (200\,\mathrm{m})^{\alpha}.$$

Indem man die untere Gleichung durch die obere teilt, erhält man

$$1{,}2 = 2^{\alpha}$$

und damit den Exponenten

$$\alpha = \log_2(1{,}2).$$

Das ist etwa 0,26.

10. Standort A mit einer breiten Verteilung hat mehr Zeitperioden mit hohen Windgeschwindigkeiten, was den Ertrag erhöhen kann, da die Leistung einer Windturbine proportional zur dritten Potenz der Windgeschwindigkeit ist. *Voraussetzung: Die Nennwindgeschwindigkeit der Turbine ist hoch genug, so dass die Leistung nicht zu oft oder zu stark durch Pitchen der Rotorblätter gedrosselt werden muss*. Jedoch führt die breite Verteilung zu größeren Schwankungen in der Energieerzeugung, was eine Herausforderung für das Stromnetz darstellt. Standort B mit einer engen Verteilung liefert eine konstantere Leistung, was für das Stromnetz vorteilhafter ist, da eine stabilere Einspeisung gewährleistet wird.

11. Der Unterschied von 6 dB entspricht recht genau einer Vervierfachung der Schallintensität. Es können also insgesamt vier Turbinen aufgestellt werden. *Das ließe sich auch umständlich per Formel lösen, indem man von den Dezibel auf die Intensitäten im Verhältnis zur Intensität bei 0 dB(A) umrechnet, was auf* $10^{45/10} \approx 4 \cdot 10^{39/10}$ *hinausläuft.*

12. Damit die Beträge der Spannungen am Verknüpfungspunkt und im starren Netz gleich sind, muss der Generator untererregt betrieben werden. Außerdem muss mit dem Winkel $\varphi > 0$ in guter Näherung gelten:

$$\cos(\varphi)|\underline{U}_R| - \sin(\varphi)|\underline{U}_L| = 0$$

Mit $|\underline{U}_R| = R|\underline{I}|$ und $|\underline{U}_L| = \omega L|\underline{I}|$ ergibt sich daraus

$$\cos(\varphi)R = \sin(\varphi)\omega L,$$

also *(falls man hier nicht direkt φ mittels Arcustangens bestimmt)*

$$\cos(\varphi)^2 R^2 = \underbrace{\sin(\varphi)^2}_{1-\cos(\varphi)^2}\,\omega^2 L^2,$$

somit

$$\cos(\varphi)^2 \frac{R^2}{\omega^2 L^2} = 1 - \cos(\varphi)^2$$

und damit

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}}.$$

Das ist etwa 0,95.

Der Betrag $|\underline{I}|$ des Stroms ergibt sich aus der Wirkleistung

$$1{,}0\,\mathrm{MW} = 10\,\mathrm{kV} \cdot |\underline{I}| \cdot \cos(\varphi),$$

so dass

$$|\underline{I}| = \frac{1{,}0\,\mathrm{MW}}{10\,\mathrm{kV} \cdot \cos(\varphi)},$$

Das sind etwa 105 A.