

Mathematik 2 für Regenerative Energien

Klausur vom 18. Juli 2025: Beispiellösungen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 18. Juli 2025, 16:29



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Für eine reale Klausurbearbeitung zu ausführliche Lösungen!

Lösungen von Gemini 2.5 Pro so, wie das $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ in einem Rutsch aus der KI gekommen ist. In Rot kommentiert von Jörn Loviscach.

1. Finden Sie den Wert von w (und nur w !) für dieses Gleichungssystem streng (!) mit der Cramerschen Regel:

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\5x + z &= 2 \\x + 7w &= 3 \\y - z &= 4\end{aligned}$$

Lösung: Das Gleichungssystem wird zuerst in Matrixform $A \cdot \vec{v} = \vec{b}$ mit dem Vektor der Variablen $\vec{v} = (x, y, z, w)^T$ aufgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Nach der Cramerschen Regel ist $w = \frac{\det(A_w)}{\det(A)}$, wobei A_w die Matrix ist, bei der die 4. Spalte (die w -Spalte) durch den Vektor \vec{b} ersetzt wird.

Wir berechnen $\det(A)$ durch Entwicklung nach der 4. Spalte:

$$\det(A) = -7 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -7 \cdot (1(0 \cdot -1) - 1(-5 - 0) + 0) = -7 \cdot (-1 + 5) = -7 \cdot 4 = -28$$

Nun berechnen wir $\det(A_w)$, wobei die 4. Spalte von A durch \vec{b} ersetzt wird. Wir entwickeln nach der 3. Zeile:

$$A_w = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_w) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Den zweiten Determinantenwert kennen wir bereits, er ist 4. Den ersten berechnen wir:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 1(4 - (-2)) - 0 + 1(0 - 1) = 6 - 1 = 5$$

Somit ist $\det(A_w) = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 5 - 12 = -7$. Der Wert für w ist also:

$$w = \frac{\det(A_w)}{\det(A)} = \frac{-7}{-28} = \frac{1}{4}$$

2. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ reelle Eigenwerte?

Lösung: Die Eigenwerte λ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 2a = \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 2a = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für λ . Sie hat reelle Lösungen, wenn die Diskriminante D nicht-negativ ist ($D \geq 0$).

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(3 - 2a) = 16 - 12 + 8a = 4 + 8a$$

Die Bedingung für reelle Eigenwerte ist $D \geq 0$:

$$4 + 8a \geq 0 \implies 8a \geq -4 \implies a \geq -\frac{1}{2}$$

Die Matrix hat für alle $a \in [-\frac{1}{2}, \infty)$ reelle Eigenwerte.

3. Schätzen Sie den Wert von $\frac{1}{0,99^2}$ durch quadratische Näherung.

Lösung: Wir verwenden die Taylor-Näherung 2. Ordnung für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ um den Entwicklungspunkt $a = 1$. Die Formel lautet: $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$. Wir benötigen die ersten beiden Ableitungen:

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^{-2} & f(1) = 1 \\ f'(x) = -2x^{-3} & f'(1) = -2 \\ f''(x) = 6x^{-4} & f''(1) = 6 \end{array}$$

Wir setzen $x = 0,99$ und $a = 1$. Damit ist $(x - a) = -0,01$.

$$\begin{aligned} f(0,99) &\approx f(1) + f'(1)(0,99 - 1) + \frac{f''(1)}{2}(0,99 - 1)^2 \\ &\approx 1 + (-2)(-0,01) + \frac{6}{2}(-0,01)^2 \\ &\approx 1 + 0,02 + 3(0,0001) \\ &\approx 1 + 0,02 + 0,0003 = 1,0203 \end{aligned}$$

Die quadratische Näherung ergibt den Wert 1,0203.

4. Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + y = \sin(2x)$.

Lösung: Die allgemeine Lösung ist die Summe aus der homogenen Lösung y_h und einer partikulären Lösung y_p . 1. Homogene Lösung: $y'' + y = 0$. Das charakteristische Polynom ist $r^2 + 1 = 0$, mit den Wurzeln $r_{1,2} = \pm i$. Die homogene Lösung ist also $y_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$. *allgemeine Lösung der Form $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$*

2. Partikuläre Lösung: Ansatz vom Typ der rechten Seite. Da $2x$ nicht mit dem Argument x der homogenen Lösung übereinstimmt, gibt es keine Resonanz. Ansatz: $y_p(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$. Ableitungen: $y_p'(x) = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)$, $y_p''(x) = -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x)$. Einsetzen in die DGL: $(-4A \cos(2x) - 4B \sin(2x)) + (A \cos(2x) + B \sin(2x)) = \sin(2x) - 3A \cos(2x) - 3B \sin(2x) = 0 \cdot \cos(2x) + 1 \cdot \sin(2x)$. Koeffizientenvergleich:

$$\cos(2x): \quad -3A = 0 \implies A = 0$$

$$\sin(2x): \quad -3B = 1 \implies B = -\frac{1}{3}$$

Die partikuläre Lösung ist $y_p(x) = -\frac{1}{3} \sin(2x)$.

3. Allgemeine Lösung: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) - \frac{1}{3} \sin(2x)$$

5. Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten c_0 und c_5 für die Funktion, welche die Periode 3 hat, für $t \in [0, 1)$ gleich 0 ist und für $t \in [1, 3)$ gleich t ist.

Lösung: Die Funktion ist $f(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 1) \\ t & t \in [1, 3) \end{cases}$ mit Periode $T = 3$. Die Kreis-

frequenz ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$. Die Formel für die komplexen Fourier-Koeffizienten lautet $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$.

Für c_0 (den Mittelwert):

$$c_0 = \frac{1}{3} \int_0^3 f(t) dt = \frac{1}{3} \left(\int_0^1 0 dt + \int_1^3 t dt \right) = \frac{1}{3} \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{4}{3}$$

oder aus Skizze ablesen!

Für c_5 (mit $n = 5$):

$$c_5 = \frac{1}{3} \int_0^3 f(t) e^{-i5(2\pi/3)t} dt = \frac{1}{3} \int_1^3 t e^{-i\frac{10\pi}{3}t} dt$$

Wir verwenden partielle Integration $\int u dv = uv - \int v du$ mit $u = t$ und $dv = e^{-i\frac{10\pi}{3}t} dt$. Dann ist $du = dt$ und $v = \frac{1}{-i\frac{10\pi}{3}} e^{-i\frac{10\pi}{3}t} = \frac{3i}{10\pi} e^{-i\frac{10\pi}{3}t}$.

$$\begin{aligned} \int_1^3 t e^{-i\frac{10\pi}{3}t} dt &= \left[t \cdot \frac{3i}{10\pi} e^{-i\frac{10\pi}{3}t} \right]_1^3 - \int_1^3 \frac{3i}{10\pi} e^{-i\frac{10\pi}{3}t} dt \\ &= \frac{3i}{10\pi} \left(3e^{-i10\pi} - 1e^{-i\frac{10\pi}{3}} \right) - \frac{3i}{10\pi} \left[\frac{3i}{10\pi} e^{-i\frac{10\pi}{3}t} \right]_1^3 \\ &= \frac{3i}{10\pi} \left(3 - e^{-i\frac{10\pi}{3}} \right) + \frac{9}{100\pi^2} \left(e^{-i10\pi} - e^{-i\frac{10\pi}{3}} \right) \end{aligned}$$

Wir benutzen $e^{-i10\pi} = \cos(-10\pi) + i \sin(-10\pi) = 1$ und $e^{-i\frac{10\pi}{3}} = e^{-i(4\pi - \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$c_5 = \frac{1}{3} \left[\frac{3i}{10\pi} \left(3 - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right) + \frac{9}{100\pi^2} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right) \right]$$

$$= \frac{i}{10\pi} \left(\frac{7}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{3}{100\pi^2} \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{20\pi} + \frac{9}{200\pi^2} \right) + i \left(\frac{7}{20\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{200\pi^2} \right)$$

Stimmt!
Aber
nicht vollangt.

6. Finden Sie die Funktion, deren Laplace-Transformierte gleich $\frac{1}{s^3+9s}$ ist.

Lösung: Wir suchen $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3+9s} \right\}$. Dazu verwenden wir die Partialbruchzerlegung.

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+9}$$

Multiplikation mit dem Nenner $s(s^2+9)$ ergibt: $1 = A(s^2+9) + (Bs+C)s = As^2 + 9A + Bs^2 + Cs = (A+B)s^2 + Cs + 9A$. Koeffizientenvergleich:

$$s^2: A+B=0$$

$$s^1: C=0$$

$$s^0: 9A=1 \implies A=\frac{1}{9}$$

Aus $A+B=0$ folgt $B=-A=-\frac{1}{9}$. Die Zerlegung ist $F(s) = \frac{1/9}{s} - \frac{(1/9)s}{s^2+9}$. Nun wenden wir die inverse Laplace-Transformation an:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{9} \cdot \frac{s}{s^2+3^2} \right\} = \frac{1}{9} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \frac{1}{9} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+3^2} \right\}$$

Mit den Standard-Transformierten $\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$ und $\mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2+a^2)\} = \cos(at)$ erhalten wir:

$$f(t) = \frac{1}{9} \cdot 1 - \frac{1}{9} \cos(3t) = \frac{1}{9}(1 - \cos(3t)) \text{ , wenn } t \geq 0$$

7. Bestimmen Sie die 2×2 -Matrix, welche die Spiegelung des \mathbb{R}^2 an der Gerade $\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ beschreibt.

Lösung: Die Spiegelungsmatrix R an der Geraden, die durch den Vektor \vec{v} aufgespannt wird, kann mit dem Einheitsvektor \vec{u} in Richtung von \vec{v} berechnet werden: $R = 2\vec{u}\vec{u}^T - I$. Der Vektor ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Seine Länge ist

$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$. Der Einheitsvektor ist $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Wir berechnen $\vec{u}\vec{u}^T$:

$$\vec{u}\vec{u}^T = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{34}} (3 \ 5) = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$$

Die fertige Formel hatten wir nicht.
Statt dessen: $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist EV. zum EW. 1, $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist EV. zum EW. -1

Nun berechnen wir die Spiegelungsmatrix R :

$$R = 2 \cdot \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{9}{17} - 1 & \frac{15}{17} \\ \frac{15}{17} & \frac{25}{17} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} & \frac{15}{17} \\ \frac{15}{17} & \frac{8}{17} \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -8 & 15 \\ 15 & 8 \end{pmatrix}$$

8. Eine 4×4 -Matrix hat die Determinante -23 . Was können Sie über Bild, Rang und Defekt dieser Matrix aussagen?

Lösung: Sei A die 4×4 -Matrix mit $\det(A) = -23$. Da $\det(A) \neq 0$, ist die Matrix invertierbar. Daraus folgen direkt die Eigenschaften für Bild, Rang und Defekt:

- **Rang:** Eine $n \times n$ -Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang hat. Da A eine 4×4 -Matrix ist, gilt:

$$\text{Rang}(A) = 4$$

- **Bild:** Das Bild (oder der Spaltenraum) einer Matrix ist der von ihren Spaltenvektoren aufgespannte Unterraum. Da der Rang 4 ist, sind die vier Spaltenvektoren im \mathbb{R}^4 linear unabhängig und spannen somit den gesamten Raum auf.

$$\text{Bild}(A) = \mathbb{R}^4$$

- **Defekt:** Der Defekt (Dimension des Kerns) ist durch den Rangsatz (Dimensionsformel) gegeben: $\text{Rang}(A) + \text{Defekt}(A) = n$. Hier ist $n = 4$.

$$4 + \text{Defekt}(A) = 4 \implies \text{Defekt}(A) = 0$$

Nicht gefragt

- (Ein Defekt von 0 bedeutet, dass der Kern der Matrix nur den Nullvektor enthält: $\text{Kern}(A) = \{\vec{0}\}$.

9. Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y^2 y' + x^3 \stackrel{!}{=} 0$.

Lösung: Dies ist eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen. Wir schreiben $y' = \frac{dy}{dx}$ und formen die Gleichung um:

$$y^2 \frac{dy}{dx} = -x^3$$

$$y^2 dy = -x^3 dx$$

Nun integrieren wir beide Seiten:

$$\int y^2 dy = \int -x^3 dx$$

$$\frac{y^3}{3} = -\frac{x^4}{4} + C$$

wobei C eine beliebige Konstante ist. Wir können die Lösung nach y auflösen:

$$y^3 = -\frac{3}{4}x^4 + 3C$$

Nennen wir die neue Konstante $K = 3C$:

$$y(x) = \sqrt[3]{K - \frac{3}{4}x^4}$$

Man könnte die Differenzierbarkeit diskutieren.

10. Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' - y' \stackrel{!}{=} x^2$ zur Anfangsbedingung $y(0) \stackrel{!}{=} 0$, $y'(0) \stackrel{!}{=} 1$.

Lösung: 1. ~~Homogene Lösung~~ *der homogenen Form*: $y'' - y' = 0$. Charakteristisches Polynom: $r^2 - r = 0 \implies r(r-1) = 0$. Die Wurzeln sind $r_1 = 0, r_2 = 1$. Die ~~homogene~~ Lösung *ds...* ist $y_h(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{1x} = c_1 + c_2 e^x$.

2. *Partikuläre Lösung*: Die rechte Seite ist x^2 . Der Standardansatz wäre $Ax^2 + Bx + C$. Da die ~~homogene~~ Lösung eine Konstante (c_1) enthält, liegt Resonanz vor. Wir müssen den Ansatz mit x multiplizieren. Neuer Ansatz: $y_p(x) = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$. $y_p'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $y_p''(x) = 6Ax + 2B$. Einsetzen in die DGL: $(6Ax + 2B) - (3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 - 3Ax^2 + (6A - 2B)x + (2B - C) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$. Koeffizientenvergleich:

$$x^2: -3A = 1 \implies A = -1/3$$

$$x^1: 6A - 2B = 0 \implies 6(-1/3) - 2B = 0 \implies -2 - 2B = 0 \implies B = -1$$

$$x^0: 2B - C = 0 \implies 2(-1) - C = 0 \implies C = -2$$

Die partikuläre Lösung ist $y_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$.

3. *Allgemeine Lösung*: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$.

4. *Anfangsbedingungen anwenden*: $y'(x) = c_2 e^x - x^2 - 2x - 2$. $y(0) = c_1 + c_2 e^0 - 0 = c_1 + c_2 = 0 \implies c_1 = -c_2$. $y'(0) = c_2 e^0 - 0 - 0 - 2 = c_2 - 2 = 1 \implies c_2 = 3$. Daraus folgt $c_1 = -3$. Die spezielle Lösung ist:

$$y(x) = 3e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x - 3$$

11. Eine gekrümmte Fläche im \mathbb{R}^3 ist beschrieben durch $z = x^2 + y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Welcher Punkt $(x|y|z)$ dieser Fläche liegt dem Punkt $(0|1|2)$ am nächsten?

Lösung: Wir wollen den Abstand zwischen einem Punkt auf der Fläche $Q = (x, y, x^2 + y)$ und dem Punkt $P = (0, 1, 2)$ minimieren. Es ist einfacher, das Quadrat des Abstands D zu minimieren:

$$D(x, y) = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = x^2 + (y - 1)^2 + (x^2 + y - 2)^2$$

Um das Minimum zu finden, setzen wir die partiellen Ableitungen von D nach x und y gleich null.


$$\frac{\partial D}{\partial x} = 2x + 2(x^2 + y - 2)(2x) = 2x(1 + 2(x^2 + y - 2)) = 2x(2x^2 + 2y - 3) = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial y} = 2(y - 1) + 2(x^2 + y - 2)(1) = 2y - 2 + 2x^2 + 2y - 4 = 2x^2 + 4y - 6 = 0$$

Aus der ersten Gleichung folgt: $x = 0$ oder $2x^2 + 2y - 3 = 0$. **Fall 1:** $x = 0$. Einsetzen in die zweite Gleichung: $2(0)^2 + 4y - 6 = 0 \implies 4y = 6 \implies y = 3/2$. Dies gibt den kritischen Punkt $(x, y) = (0, 3/2)$.

Fall 2: $2x^2 + 2y - 3 = 0$. Aus der zweiten Gleichung ($2x^2 + 4y - 6 = 0$) können wir x^2 isolieren: $x^2 = 3 - 2y$. Einsetzen in die Bedingung für Fall 2: $2(3 - 2y) + 2y - 3 = 0 \implies 6 - 4y + 2y - 3 = 0 \implies 3 - 2y = 0 \implies y = 3/2$. Setzen wir dieses y

Das muss das globale Minimum sein, weil $D(x,y) \rightarrow \infty$ für $x,y \rightarrow \infty$ und es keine andere Stelle mit Gradient 0 gibt.



wieder in $x^2 = 3 - 2y$ ein: $x^2 = 3 - 2(3/2) = 0 \implies x = 0$. Beide Fälle führen zum selben kritischen Punkt $(0, 3/2)$. Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten $x = 0$ und $y = 3/2$. Die z -Koordinate ist: $z = x^2 + y = 0^2 + 3/2 = 3/2$. Der Punkt auf der Fläche, der $(0, 1, 2)$ am nächsten liegt, ist $(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

12. Der Wert der Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ hängt nur vom Abstand r vom Ursprung ab und beträgt e^{-r} . Integrieren Sie diese Funktion über die (Voll-)Kugel mit Radius 7 und Mittelpunkt im Ursprung.

Lösung: Wir sollen das Volumenintegral $\iiint_V f(x, y, z) dV$ berechnen, wobei V die Kugel mit Radius $R = 7$ ist und $f(x, y, z) = e^{-r} = e^{-\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Dieses Integral lässt sich am einfachsten in Kugelkoordinaten berechnen. In Kugelkoordinaten ist $r = \rho$ und das Volumenelement ist $dV = \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta$. Die Integrationsgrenzen für eine Vollkugel mit Radius 7 sind:

- $\rho \in [0, 7]$
- $\phi \in [0, \pi]$
- $\theta \in [0, 2\pi]$

Das Integral lautet:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^7 e^{-\rho} \cdot \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta$$

Das Integral ist separabel:

$$I = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin(\phi) d\phi \right) \left(\int_0^7 \rho^2 e^{-\rho} d\rho \right)$$

Wir berechnen die drei Teile einzeln:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$\int_0^\pi \sin(\phi) d\phi = [-\cos(\phi)]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$$

Das ρ -Integral erfordert zweimalige partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int \rho^2 e^{-\rho} d\rho &= -\rho^2 e^{-\rho} - \int 2\rho(-e^{-\rho}) d\rho \\ &= -\rho^2 e^{-\rho} + 2 \int \rho e^{-\rho} d\rho \\ &= -\rho^2 e^{-\rho} + 2 \left(-\rho e^{-\rho} - \int 1 \cdot (-e^{-\rho}) d\rho \right) \\ &= -\rho^2 e^{-\rho} - 2\rho e^{-\rho} + 2 \int e^{-\rho} d\rho \\ &= -\rho^2 e^{-\rho} - 2\rho e^{-\rho} - 2e^{-\rho} = -e^{-\rho}(\rho^2 + 2\rho + 2) \end{aligned}$$

Einsetzen der Grenzen $[0, 7]$:

$$\begin{aligned} \int_0^7 \rho^2 e^{-\rho} d\rho &= [-e^{-\rho}(\rho^2 + 2\rho + 2)]_0^7 \\ &= (-e^{-7}(7^2 + 2 \cdot 7 + 2)) - (-e^{-0}(0^2 + 2 \cdot 0 + 2)) \\ &= -e^{-7}(49 + 14 + 2) - (-1 \cdot 2) = -65e^{-7} + 2 \end{aligned}$$

Das Gesamtergebnis ist das Produkt der drei Teile:

$$I = (2\pi) \cdot (2) \cdot (2 - 65e^{-7}) = 4\pi(2 - 65e^{-7})$$