

Mathematik 2 für Regenerative Energien

Klausur vom 18. Juli 2025: Beispiellösungen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 18. Juli 2025, 16:43



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Lösungen von Grok 4 (Version 0709 via LMArena) so, wie das $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ in einem Rutsch aus der KI gekommen ist. In Rot kommentiert von Jörn Loviscach.

Erster Versuch mit dem Prompt: Schreibe die Lösungen der folgenden Aufgaben als LaTeX!

1. $w = \frac{1}{4}$

2. $a \geq -\frac{1}{2}$

3. $1,0203$

4. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3} \sin(2x)$

5. $c_0 = \frac{4}{3}, \quad c_5 = \frac{10\sqrt{3}\pi + 9 + i(70\pi - 3\sqrt{3})}{200\pi^2}$

6. $f(t) = \frac{1 - \cos(3t)}{9} \quad (t \geq 0)$

7. $\begin{pmatrix} -\frac{8}{17} & \frac{15}{17} \\ \frac{15}{17} & \frac{8}{17} \end{pmatrix}$

8. Das Bild ist ganz \mathbb{R}^4 , der Rang ist 4 und der Defekt ist 0.

9. $\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}x^4 = C$

10. $y = -3 + 3e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$

11. $\left(0 \left| \frac{3}{2} \right| \frac{3}{2} \right)$

OK, grok 4 hat
meinen Prompt
sehr witzig geantwortet!

Korrekt!

12. $4\pi(2 - 65e^{-7})$

Zweiter Versuch, neuer Chat mit dem Prompt: Schreibe die Lösungen samt Lösungsweg der folgenden Aufgaben als LaTeX!

1. Das Koeffizientenmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante $\det(A)$ wird durch Kofaktorenentwicklung entlang der vierten Spalte berechnet. Der einzige nicht verschwindende Eintrag ist $a_{34} = 7$. Der Kofaktor ist $(-1)^{3+4} \det(M_{34}) = -\det(M_{34})$, wobei

$$M_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(M_{34}) = 4.$$

Also $\det(A) = 7 \cdot (-4) = -28$.

Für w ersetzen wir die vierte Spalte durch den Vektor $(1, 2, 3, 4)^T$ und erhalten

$$A_w = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante $\det(A_w)$ wird durch Kofaktorenentwicklung entlang der dritten Spalte berechnet. Die nicht verschwindenden Einträge sind $a_{23} = 1$ und $a_{43} = -1$. Die Kofaktoren sind $C_{23} = 6$ und $C_{43} = 13$. Also $\det(A_w) = 1 \cdot 6 + (-1) \cdot 13 = -7$.

Nach der Cramerschen Regel ist $w = \det(A_w) / \det(A) = -7 / -28 = 1/4$.

2. Die charakteristische Gleichung ist $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + (3-2a) = 0$.

Die Diskriminante ist $16 - 4(3-2a) = 4 + 8a$. Für reelle Eigenwerte muss $4 + 8a \geq 0$, also $a \geq -1/2$.

3. Wir approximieren $f(x) = 1/x^2$ um $x = 1$ mit $x = 0,99 = 1 - 0,01$. Es gilt $f(1) = 1$, $f'(1) = -2$, $f''(1) = 6$. Die quadratische Taylor-Näherung ist

$$f(1+h) \approx 1 - 2h + \frac{1}{2} \cdot 6h^2 = 1 + 0,02 + 3 \cdot 0,0001 = 1,0203.$$

4. Die ~~homogene~~ Lösung ^{der homogenen Form} ist $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Eine Partikulärlösung ist $y_p = -\frac{1}{3} \sin(2x)$. Die allgemeine Lösung ist $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3} \sin(2x)$.

5. Die Funktion hat Periode $T = 3$. Der Koeffizient $c_0 = \frac{1}{3} \int_0^3 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_1^3 t dt = \frac{4}{3}$.

Der Koeffizient $c_5 = \frac{1}{3} \int_1^3 t e^{-i(10\pi t/3)} dt$. Mit $\omega = 10\pi/3$ ist die Integrale $\int_1^3 t e^{-i\omega t} dt = \left[\left(\frac{i}{\omega} t + \frac{1}{\omega^2} \right) e^{-i\omega t} \right]_1^3 = \frac{i}{\omega} (3 + e^{-i\pi/3}) + \frac{1}{\omega^2} (1 + e^{-i\pi/3})$. Also $c_5 = \frac{1}{3}$ mal diesem Ausdruck. = ? *Korrekt!*

6. Zerlegung: $\frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+9} \right)$. Die inverse Laplace-Transformierte ist $\frac{1}{9}(1 - \cos(3t))$ für $t > 0$.

7. Die Matrix ist $\begin{pmatrix} -8/17 & 15/17 \\ 15/17 & 8/17 \end{pmatrix}$.

8. Da $\det = -23 \neq 0$, ist die Matrix invertierbar. Der Rang ist 4, der Defekt (Dimension des Kerns) ist 0 und das Bild ist \mathbb{R}^4 .

9. Die Gleichung ist $y^2 y' + x^3 = 0$. Separation ergibt $y^2 dy = -x^3 dx$. Integration liefert $\frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{4} x^4 = C$, also $4y^3 + 3x^4 = K$. $\Rightarrow y = ?$

10. Die homogene Lösung ist $y_h = c_1 + c_2 e^x$. Eine Partikulärlösung ist $y_p = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$. Die allgemeine Lösung ist $y = c_1 + c_2 e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$. Mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ folgt $c_1 = -3$, $c_2 = 3$. Also $y = -3 + 3e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$.

11. Der nächste Punkt ist $(0, 3/2, 3/2)$.

12. Das Integral ist $4\pi \int_0^7 r^2 e^{-r} dr = 4\pi(2 - 65e^{-7})$.