

Mathematik 2 für Regenerative Energien

Klausur vom 2. Oktober 2025: Beispiellösungen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 1. Oktober 2025, 23:02



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Lösungen von Claude Sonnet 4.5 so, wie das \LaTeX in einem Rutsch aus der KI gekommen ist. In Rot kommentiert von Jörn Loviscach.

Aufgabe 1: Gaußsche Elimination

Gegeben ist das System:

$$\begin{aligned}x + y + 2z + w &= 3 \\2x + 3y + 5z + 2w &= 7 \\3x + 5y + 8z + 3w &= 11\end{aligned}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 8 & 3 & 11 \end{array} \right)$$

Schritt 1: Eliminiere x aus Zeile 2 und 3.

Zeile 2 \rightarrow Zeile 2 $-2 \cdot$ Zeile 1:

$$2 - 2 \cdot 1 = 0, \quad 3 - 2 \cdot 1 = 1, \quad 5 - 2 \cdot 2 = 1, \quad 2 - 2 \cdot 1 = 0, \quad 7 - 2 \cdot 3 = 1$$

Zeile 3 \rightarrow Zeile 3 $-3 \cdot$ Zeile 1:

$$3 - 3 \cdot 1 = 0, \quad 5 - 3 \cdot 1 = 2, \quad 8 - 3 \cdot 2 = 2, \quad 3 - 3 \cdot 1 = 0, \quad 11 - 3 \cdot 3 = 2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Schritt 2: Eliminiere y aus Zeile 3.

Zeile 3 \rightarrow Zeile 3 $-2 \cdot$ Zeile 2:

$$0 - 2 \cdot 0 = 0, \quad 2 - 2 \cdot 1 = 0, \quad 2 - 2 \cdot 1 = 0, \quad 0 - 2 \cdot 0 = 0, \quad 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Rückwärtseinsetzen:

Aus Zeile 2: $y + z = 1 \Rightarrow y = 1 - z$

Aus Zeile 1: $x + y + 2z + w = 3 \Rightarrow x + (1 - z) + 2z + w = 3 \Rightarrow x + z + w = 2 \Rightarrow x = 2 - z - w$

Lösung: Das System hat unendlich viele Lösungen mit zwei freien Parametern:

$$x = 2 - z - w, \quad y = 1 - z, \quad z \text{ frei}, \quad w \text{ frei}$$

oder in Vektorform:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*(oder dann
äquivalente
Aufm, diese
Ebene zu schreiben))*

Aufgabe 2: Kern der Matrix

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Gesucht: $\ker(A) = \{\vec{v} \mid A\vec{v} = \vec{0}\}$

Das Gleichungssystem $A\vec{v} = \vec{0}$ lautet:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x + 4y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist das Doppelte der ersten, also haben wir nur eine unabhängige Gleichung:

$$x + 2y + 3z = 0 \Rightarrow x = -2y - 3z$$

Mit freien Parametern y und z :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\ker(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*die Ebene
2 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
(oder äquivalent)*

Aufgabe 3: Differentialgleichung $y' = y^2 \cos(3x)$

Dies ist eine separierbare DGL. Wir trennen die Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cos(3x)$$

$$\frac{dy}{y^2} = \cos(3x) dx$$

Integration beider Seiten:

$$\int y^{-2} dy = \int \cos(3x) dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{3} \sin(3x) + C$$

*(oder sofort die
Integrations
einsetzen)*

Anfangsbedingung $y(\pi) = 2$:

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \sin(3\pi) + C = -\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot 0 + C = C$$

Also $C = -\frac{1}{2}$ und:

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{2}$$

Auflösen nach y :

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{2} = \frac{3 - 2 \sin(3x)}{6}$$

Lösung:

$$y(x) = \frac{6}{3 - 2 \sin(3x)}$$

Aufgabe 4: Fourier-Koeffizienten

Die Funktion hat Periode $T = 2$, also $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$.

Die Funktion ist:

$$f(t) = \begin{cases} -3 & t \in [-1, 0) \\ 3 & t \in [0, 1) \end{cases}$$

Koeffizient a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 (-3) dt + \int_0^1 3 dt \right] \\ &= \frac{1}{2} [(-3) \cdot 1 + 3 \cdot 1] = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Koeffizient a_5 :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt = \int_{-1}^1 f(t) \cos(n\pi t) dt$$

Für $n = 5$:

$$\begin{aligned} a_5 &= \int_{-1}^0 (-3) \cos(5\pi t) dt + \int_0^1 3 \cos(5\pi t) dt \\ &= -3 \left[\frac{\sin(5\pi t)}{5\pi} \right]_{-1}^0 + 3 \left[\frac{\sin(5\pi t)}{5\pi} \right]_0^1 \\ &= -3 \cdot \frac{1}{5\pi} [\sin(0) - \sin(-5\pi)] + 3 \cdot \frac{1}{5\pi} [\sin(5\pi) - \sin(0)] \\ &= -3 \cdot \frac{1}{5\pi} [0 - 0] + 3 \cdot \frac{1}{5\pi} [0 - 0] = 0 \end{aligned}$$

*unnötig,
weil
Ergebnis
wegen
Symmetrie
(ungerade
Funktion)
klar*

Lösung: $a_0 = 0$, $a_5 = 0$

Aufgabe 5: Inverse Laplace-Transformation

Gegeben: $F(s) = \frac{s+3}{s^3+4s}$

Partialbruchzerlegung. Zuerst faktorisieren:

$$s^3 + 4s = s(s^2 + 4)$$

Ansatz:

$$\frac{s+3}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

Multiplikation mit $s(s^2+4)$:

$$s+3 = A(s^2+4) + (Bs+C)s$$

$$s+3 = As^2 + 4A + Bs^2 + Cs$$

$$s+3 = (A+B)s^2 + Cs + 4A$$

Koeffizientenvergleich:

$$s^2: 0 = A + B$$

$$s^1: 1 = C$$

$$s^0: 3 = 4A$$

Also: $A = \frac{3}{4}$, $C = 1$, $B = -\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\frac{s+3}{s^3+4s} &= \frac{3/4}{s} + \frac{-\frac{3}{4}s+1}{s^2+4} = \frac{3}{4s} - \frac{3s}{4(s^2+4)} + \frac{1}{s^2+4} \\ &= \frac{3}{4s} - \frac{3}{4} \cdot \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2+4}\end{aligned}$$

Rücktransformation:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos(at), \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin(at)$$

Mit $a = 2$:

Lösung:

$$f(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t)$$

Aufgabe 6: Lineare Näherung

Gegeben: $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y}$, gesucht: $f(1,02; 2,99) \approx ?$ bei $(x_0, y_0) = (1, 3)$

Lineare Näherung:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

(Ich schreibe $\frac{\partial f}{\partial x}$.)

Berechne die partiellen Ableitungen:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [(x^2 + y)^{-1}] = -(x^2 + y)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2 + y)^2}$$

$$f_y(x, y) = -(x^2 + y)^{-2} \cdot 1 = -\frac{1}{(x^2 + y)^2}$$

An der Stelle $(1, 3)$:

$$\begin{aligned}f(1, 3) &= \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} \\ f_x(1, 3) &= -\frac{2 \cdot 1}{(1+3)^2} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8} \\ f_y(1, 3) &= -\frac{1}{(1+3)^2} = -\frac{1}{16}\end{aligned}$$

Mit $x = 1,02$ und $y = 2,99$:

$$\Delta x = 1,02 - 1 = 0,02, \quad \Delta y = 2,99 - 3 = -0,01$$

Lösung:

$$\begin{aligned}f(1,02; 2,99) &\approx \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{2}{100} + \left(-\frac{1}{16}\right) \cdot \left(-\frac{1}{100}\right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{800} + \frac{1}{1600} = \frac{1}{4} - \frac{1}{400} + \frac{1}{1600} = \frac{1}{4} - \frac{4}{1600} + \frac{1}{1600} = \frac{1}{4} - \frac{3}{1600}\end{aligned}$$

Aufgabe 7: Abstand paralleler Geraden

Gegeben: $g_1: y = 2x + 3$ und $g_2: y = 2x + 7$

Beide Geraden haben die Form $2x - y + c = 0$, also:

$$g_1: 2x - y + 3 = 0$$

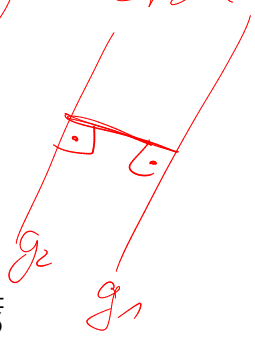
$$g_2: 2x - y + 7 = 0$$

Wähle einen Punkt auf g_1 , z.B. $P = (0, 3)$ (für $x = 0$ ist $y = 3$).

Der Abstand von P zur Geraden $g_2: 2x - y + 7 = 0$ ist:

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|0 - 3 + 7|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Die Formel liefert
 mit nicht. Also
 geometrisch konstruieren
 oder
 Minimum
 suchen,
 z.B. von
 $\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|$



Lösung:

$$d = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Aufgabe 8: Determinante

Gegeben: $\det(A) = 5$ und $B = 2A$ (jeder Eintrag verdoppelt).

(Für eine $n \times n$ -Matrix gilt: $\det(cA) = c^n \det(A)$)

Hier ist $n = 3$, also:

$$\det(B) = \det(2A) = 2^3 \det(A) = 8 \cdot 5 = 40$$

Oder Trick:
 Einfach so eine
 Matrix suchen,
 z.B. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 und dann
 $\begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = ?$

Begründung: Beim Multiplizieren jeder Zeile mit einem Faktor c wird die Determinante mit c multipliziert. Da alle drei Zeilen mit 2 multipliziert werden, wird die Determinante mit $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ multipliziert.

Lösung: $\det(B) = 40$

Aufgabe 9: Eigenvektor

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat Dreiecksform in den ersten beiden Zeilen. Wir sehen sofort: Die ersten beiden Spalten deuten auf Eigenwerte 1 und 2 hin.

Nun könnte auch sofort $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ raten!

Teste $\lambda = 1$: Löse $(A - I)\vec{v} = \vec{0}$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Das System:

$$\begin{aligned} 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 &= 0 \\ v_2 &= 0 \\ -v_1 - 3v_2 - 4v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aus Zeile 2: $v_2 = 0$

Aus Zeile 3: $-v_1 - 4v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = -4v_3$

Mit $v_3 = 1$:

Lösung: Ein Eigenvektor ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda = 1$.

Aufgabe 10: Lineare DGL mit Störterm

Gegeben: $y' - 3y = e^{3x}$, $y(0) = 2$

~~Homogene Lösung:~~ $y' - 3y = 0 \Rightarrow y_h = Ce^{3x}$

Partikuläre Lösung: Variation der Konstanten. Da der Störterm e^{3x} gleich der homogenen Lösung ist, Ansatz: $y_p = Axe^{3x}$

*Oder Ansatz Ae^{3x}
Dann Ansatz Axe^{3x}*

$$\begin{aligned} y'_p &= Ae^{3x} + 3Axe^{3x} \\ y'_p - 3y_p &= Ae^{3x} + 3Axe^{3x} - 3Axe^{3x} = Ae^{3x} \end{aligned}$$

Soll gleich e^{3x} sein: $A = 1$, also $y_p = xe^{3x}$

Allgemeine Lösung: $y = Ce^{3x} + xe^{3x}$

Anfangsbedingung: $y(0) = 2$:

$$2 = Ce^0 + 0 \cdot e^0 = C$$

Lösung:

$$y(x) = 2e^{3x} + xe^{3x} = e^{3x}(2 + x)$$

Aufgabe 11: Kein Gradientenfeld

Das abgebildete Vektorfeld ist $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$.

Ein Vektorfeld $\vec{F} = (P, Q)$ ist ein Gradientenfeld, wenn es eine Funktion ϕ gibt mit $\nabla\phi = \vec{F}$, also $\frac{\partial\phi}{\partial x} = P$ und $\frac{\partial\phi}{\partial y} = Q$.

Notwendige Bedingung (Integrabilitätsbedingung):


$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Für $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ gilt:

$$\begin{aligned} P &= -y, & Q &= x \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \end{aligned}$$

Es gilt $-1 \neq 1$, also ist die Integrabilitätsbedingung verletzt.

Geometrische Begründung: Das Vektorfeld zeigt in Richtung von Kreisen um den Ursprung (es ist tangential an Kreise). Wenn es ein Gradientenfeld wäre, müsste das Linienintegral entlang eines geschlossenen Weges null sein. Aber entlang eines Kreises zeigt das Feld immer in Richtung der Bewegung, das Integral ist nicht null. Also kann es kein Gradientenfeld sein.

Oder noch einfacher:  So wenn müsste der Funktionswert wachsen. Aber dann müsste der Wert an x größer sein als er selbst. ↘

Aufgabe 12: Integral in Polarkoordinaten

Gesucht: $\iint_D \cos(x^2 + y^2) dA$ über die Kreisscheibe $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$

Polarkoordinaten: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $x^2 + y^2 = r^2$, $dA = r dr d\varphi$

Die Kreisscheibe: $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} \iint_D \cos(x^2 + y^2) dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \cos(r^2) \cdot r dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^3 r \cos(r^2) dr = 2\pi \cdot \int_0^3 r \cos(r^2) dr \end{aligned}$$

Substitution: $u = r^2$, $du = 2r dr$, $r dr = \frac{1}{2} du$

Grenzen: $r = 0 \Rightarrow u = 0$, $r = 3 \Rightarrow u = 9$

$$\int_0^3 r \cos(r^2) dr = \int_0^9 \cos(u) \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} [\sin(u)]_0^9 = \frac{1}{2} (\sin(9) - \sin(0)) = \frac{\sin(9)}{2}$$

Lösung:

$$\iint_D \cos(x^2 + y^2) dA = 2\pi \cdot \frac{\sin(9)}{2} = \pi \sin(9)$$