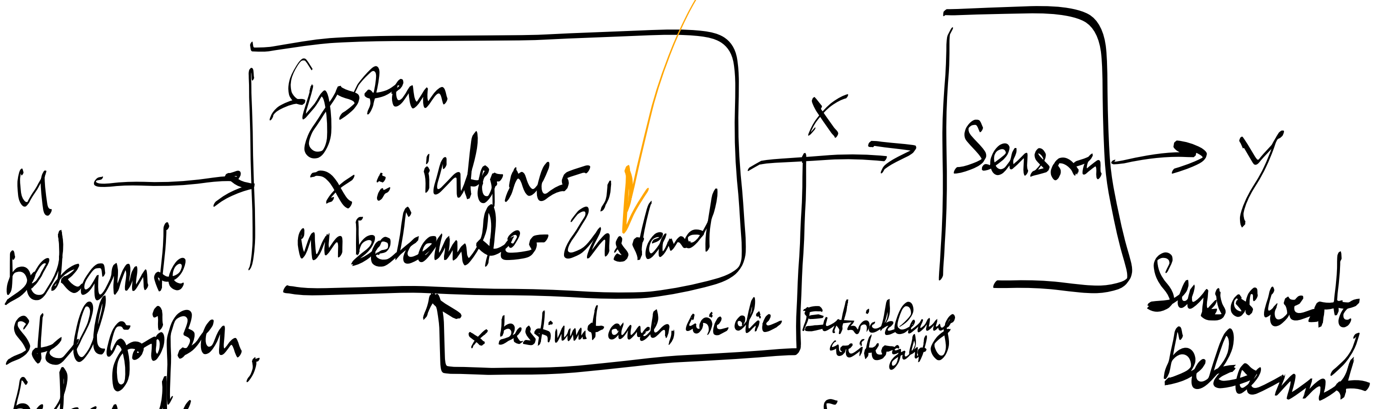
EKF: Extended Kalman Filter

Job: Den schätzen!



Modell für das System:

$$x(k+1) = f\big(x(k), u(k)\big) + \varepsilon_x$$

$\boxed{\text{(*)}}$ f modelliert Entwicklung des Systems

Modell für Messung:

$$y = g(x) + \varepsilon_y$$

ε_x, ε_y: Rauschen

x_p: vorhergesagter Zustand

x_c: korrigierter vorhergesagter Zustand

x_c als Schätzung ausgeben!

$$x_p(k+1) = f(x_c(k), u(k))$$

Rechenschritt 1

y_p : vorhergesagte Sensorwerte

$$y_p = g(x_p) \quad 2$$

Was messe ich jetzt wirklich?

Was habe ich denn für jetzt vorgesagt?

$$x_c \overset{*}{=} x_p + K\cdot(\underbrace{y - y_p}_{\text{„Innovation"}}) \quad 5$$

für nächsten Schritt

Kalman Gain: Wie wählt man K optimal?

Dann hat man den Kalman-Filter!

- Vertrauen wir der Vorhersage? Dann $K=0$!
- Vertrauen wir den Sensoren? Dann soll x_c komplett aus y kommen!

Also $x_c \overset{!}{=} g^{-1}(y)$.

$$\| \quad x_p + K\cdot(y - \underbrace{y_p}_{= g(x_p)})$$

Was für K einsetzen, damit diese Gleichung stimmt?

$$\Rightarrow g^{-1}(y) = x_p + K \cdot (y - g(x_p)) \quad // \, g(\cdot)$$

$$\Rightarrow y = g\Big(x_p + \underbrace{K \cdot (y - g(x_p))}_{\text{klein ?!? Lineare Näherung!}}\Big)$$

$$= g(x_p) + g' \cdot K \cdot (y - g(x_p))$$

offiziell: Jacobi-Matrix

Wähle in diesem Fall also:

$$K = g'^{-1}$$

Um zwischen diesen beiden Fällen abzuwägen, müssen wir die Unsicherheiten beschreiben:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E[X])^2\right] = \text{mittlere quadratische Abweichung}$$

σ: Standardabweichung

X: Zufallsgröße

$\vec{X}$ ein Vektor von Zufallsgrößen:

Transposition

$$\text{Kovarianzmatrix} = E\left[(\vec{X} - E[\vec{X}])(\vec{X} - E[\vec{X}])^T\right]$$

Cov_x : Kovarianzmatrix von ε_x

Cov_y : " " ε_y

Cov_p : geschätzte Kovarianzmatrix für die Unsicherheit von x_p

Vergleiche:

Unsicherheit der Sensorwerte $\longleftrightarrow$ Unsicherheit der Vorhersage der Sensorwerte

Cov_y $\qquad$ $g' \cdot Cov_p \cdot g'^T$

Transposition

Intuitiv muss also gelten:
(und beweisbar optimal)

$$K = g'^{-1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{Cov_y}{g' Cov_p g'^T}}$$

Korrekt wäre: $^{-1}$, weil Matrizen

4

$$= Cov_p g'^T \left(g' Cov_p g'^T + Cov_y \right)^{-1}$$

Noch zu bestimmen!

Cov_c: geschätzte Unsicherheit von x_c

$$Cov_p(k+1) \overset{(**)}{=} f'\, Cov_c(k)\, f'^T + Cov_x$$

3

Noch zu bestimmen!

Zwischenschritt:

$$x - x_c = x - \overbrace{\left(x_p + K\cdot(\underbrace{y}_{g(x)+\varepsilon_y} - \underbrace{y_p}_{g(x_p)})\right)}^{(*)}$$

$$= x - x_p - K\cdot\left(g(x) + \varepsilon_y - g(x_p)\right)$$

$$\approx g'(x_p)\cdot(\underbrace{x - x_p}_{\text{klein??}})$$

Lineare Näherung!

$$\approx \underline{x - x_p} - K\cdot\left(g'\cdot\underline{(x - x_p)} + \varepsilon_y\right)$$

$$= (\mathbb{1} - K \cdot g')(x - x_p) - K\varepsilon_y$$

Annahme: unkorreliert

$$\Rightarrow Cov_c =$$

6 $$(\mathbb{1} - K \cdot g')\, Cov_p\, (\mathbb{1} - K \cdot g')^T + K \cdot Cov_y \cdot K^T$$

lange Formel, aber robust zu rechnen

K von oben einsetzen

$$= \dots = (1 - K \cdot g')\, Cov_p$$

Also dies merken:

- x_c
- Cov_c

Und das Schritt für Schritt weiterpflegen, mit Hilfe der Sensorwerte.

Vorsicht: Die verwendeten linearen Näherungen gelten nur, wenn die Unsicherheiten klein genug sind.