IMA 1: Analysis. Aufgaben Woche 3

Version: 2025-10-22

This work is licensed under the Creative Commons Attribution–NonCommercial–ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/ or write to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, CA 94105, USA.

Aufgaben inspiriert von ChatGPT 5 und Gemini 2.5 Pro, bearbeitet von Jörn Loviscach

Seminargruppe A

1. Wie viele Abbildungen gibt es von der Menge $D = \{a, b, c, d\}$ nach der Menge $Z = \{1, 2, 3\}$?

2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{falls } x \leq -1 \\ x, & \text{falls } -1 < x < 2 \\ 4, & \text{falls } x \geq 2. \end{cases}$$

   Bestimmen Sie die Bildmenge von f.

3. Plotten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die kaufmännische Rundung auf ganze Zahlen beschreibt. Beachten Sie auch das Verhalten für negative x.

4. In der Programmierung werden wiederverwendbare Code-Blöcke oft „Funktionen“ genannt. Der mathematische Funktionsbegriff ist jedoch strenger. Welche der folgenden Funktionen aus der Programmierung sind auch mathematische Funktionen? Warum (nicht)?

   (a) Eine Funktion nimmt eine ganze Zahl n entgegen und gibt immer das Ergebnis von $2n$ zurück.

   (b) Eine Funktion nimmt keine Eingabe entgegen und gibt bei jedem Aufruf eine zufällige ganze Zahl von 1 bis 6 zurück.

   (c) Eine Funktion nimmt einen Text (eine Zeichenkette) entgegen. Sie gibt zurück, wie viele Zeichen der Text hat.

   (d) Eine Funktion nimmt eine reelle Zahl entgegen. Falls diese ungleich null ist, gibt die Funktion den Kehrwert der Zahl zurück. Falls die Zahl gleich null ist, gibt die Funktion die Zahl 23 zurück.

   (e) Außerhalb der Funktion existiert eine globale Variable, die am Anfang auf 0 gesetzt wird. Die Funktion addiert bei jedem Aufruf 1 zur globalen Variable und gibt dann deren neuen Wert zurück.

5. Konstruieren Sie den Graphen von $x \mapsto 2|\frac{x}{4} - 1| + 3$ aus dem Graphen von $x \mapsto |x|$.

6. Begründen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nie gerade *und* streng monoton steigend sein kann, wenn die Definitionsmenge mehr umfasst als die Zahl 0[c1].

[c1] *text added by jl*

7. Bestimmen Sie eine größtmögliche Menge $D \subset \mathbb{R}$, so dass die Funktion $f : x \mapsto x^2 - 4x$ mit der Definitionsmenge D umkehrbar ist. Zusatzfrage: Warum ist D nicht eindeutig bestimmt?

8. Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 23 - x$ sind jeweils ihre eigenen Umkehrfunktionen. Finden Sie eine weitere Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dieser Art, die nicht insgesamt eine lineare Funktion ist. Tipp: stückweise Definition.

Seminargruppe B

1. Wie viele umkehrbare Abbildungen gibt es von der Menge $D = \{a, b, c\}$ nach der Menge $Z = \{1, 2, 3\}$?

2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq -1 \\ 4, & \text{falls } -1 < x < 2 \\ x, & \text{falls } x \geq 2. \end{cases}$$

   Bestimmen Sie die Bildmenge von f.

3. Plotten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die den Abstand des jeweiligen x von der zu x nächstliegenden ganzen Zahl angibt.

4. In der Programmierung werden wiederverwendbare Code-Blöcke oft „Funktionen“ genannt. Der mathematische Funktionsbegriff ist jedoch strenger. Welche der folgenden Funktionen aus der Programmierung sind auch mathematische Funktionen? Warum (nicht)?

   (a) Eine Funktion nimmt eine ganze Zahl n und gibt zurück:

$$f(n) = \begin{cases} 3n + 1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ n/2, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

   (b) Eine Funktion nimmt eine Liste von Zahlen (als geordnete Abfolge) entgegen und gibt die *sortierte* Liste in aufsteigender Reihenfolge zurück.

   (c) Eine Funktion nimmt einen Text (eine Zeichenkette) entgegen und gibt die rückwärts gelesene Zeichenkette zurück.

   (d) Die Funktion greift auf die Systemuhr des Computers zu und gibt 1 zurück, wenn der aktuelle Wochentag ein Montag ist, sonst 0.

   (e) Eine Funktion nimmt eine reelle Zahl entgegen. Ist diese Zahl negativ, gibt die Funktion den Wert -1 zurück, ansonsten die Quadratwurzel der Zahl.

5. Konstruieren Sie den Graphen von $x \mapsto 2(\frac{x}{3} + 1)^2 - 3$ aus dem Graphen von $x \mapsto x^2$.

6. Begründen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nie gerade *und* umkehrbar sein kann, wenn die Definitionsmenge mehr umfasst als die Zahl 0[c1].

[c1] *text added by jl*

7. Bestimmen Sie eine größtmögliche Menge $D \subset \mathbb{R}$, so dass die Funktion $f : x \mapsto |3x-4|$ mit der Definitionsmenge D umkehrbar ist. Zusatzfrage: Warum ist D nicht eindeutig bestimmt?

8. Die Funktion $f : \{1,2,3,\ldots\} \to \{1,2,3,\ldots\}$ mit $f(x) = x$ ist ihre eigene Umkehrfunktion. Finden Sie eine weitere Funktion $g : \{1,2,3,\ldots\} \to \{1,2,3,\ldots\}$ dieser Art. Es genügt, deren Rechenvorschrift in Worten zu beschreiben.