IMA 1: Analysis. Aufgaben Woche 4

Version: 2025-10-18

This work is licensed under the Creative Commons Attribution–NonCommercial–ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/ or write to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, CA 94105, USA.

Aufgaben inspiriert von ChatGPT 5 und Gemini 2.5 Pro, bearbeitet von Jörn Loviscach

Seminargruppe A

1. Der Graph einer Polynomfunktion durchläuft die x-Achse bei $x = -2$, berührt sie bei $x = 0$ und schneidet sie steil bei $x = 3$. Für $x \to \pm\infty$ steigt der Graph nach $+\infty$. Welche Vielfachheiten der Nullstellen bei $x = -2, 0, 3$ sind jeweils möglich? Geben Sie zwei Polynome mit allen diesen Eigenschaften an. Die beiden Polynome sollen keine Vielfachen voneinander sein. Es genügt irgendeine Rechenvorschrift für die Polynome; sie müssen nicht in der Form $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ geschrieben sein.

2. Sie kennen die fünf Messpunkte $(-2|5)$, $(-1|2)$, $(0|1)$, $(1|2)$, $(2|5)$. Zeigen Sie: Es gibt genau ein Polynom p vom Grad ≤ 4, das durch alle diese fünf Punkte läuft. Geben Sie das an. Geben Sie außerdem ein Polynom vom Grad 23 an, das durch alle diese fünf Punkte läuft. Es genügt irgendeine Rechenvorschrift für die Polynome; sie müssen nicht in der Form $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ geschrieben sein.

3. Sie kennen die vier Messpunkte $(-1|0)$, $(0|1)$, $(1|0)$, $(7|0)$. Bestimmen Sie eine Polynomfunktion, die durch alle diese vier Punkte läuft. Skizzieren Sie diese. Diskutieren Sie, ob dieser Verlauf plausibel ist, wenn man annimmt, dass die Messpunkte nicht exakt sind.

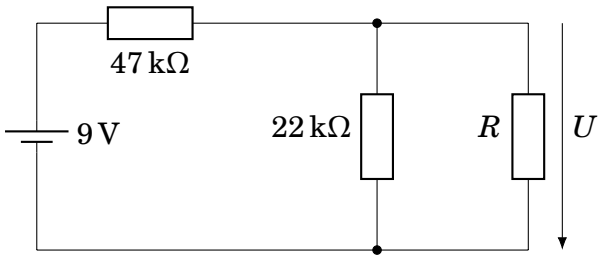
4. Gegeben ist Schar rationaler Funktionen f_α mit
$$f_\alpha(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1 + \alpha}$$
in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche α entsteht eine Polstelle? Für welche α gibt es eine hebbare Definitionslücke? Ergänzen Sie f_α im letzteren Fall stetig.

5. Entwerfen Sie eine rationale Funktion f mit allen folgenden Eigenschaften:
   - Asymptote $y = 2x - 3$,
   - eine hebbare Definitionslücke bei $x = 1$,
   - eine Polstelle erster Ordnung bei $x = -2$,
   - $f(0) = 0$.

6. Finden Sie zwei verschiedene rationale Funktionen f, g mit
$$f(x) - g(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty,$$
die jedoch verschiedene Polstellen besitzen. Skizzieren Sie den prinzipiellen Verlauf beider Graphen.

7. Gegeben ist die Polynomfunktion $f(x) = x^5 + 7x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 7x + 1$. Zeigen Sie: Für $x \neq 0$ gilt $x^5 f(1/x) = f(x)$. Was folgt daraus für die Lage der Nullstellen von f?

8. Wie hängt die Spannung U in dieser Schaltung vom Widerstand R ab? Was passiert, wenn man R durch einen Draht ersetzt? Was passiert, wenn man R offen lässt?



Gemäß EN 60617-3:1996 könnten die Punkte auf den T-Verbindungen weggelassen werden.

Seminargruppe B

1. Der Graph einer Polynomfunktion hat bei $x = -4$ eine Sattelstelle auf der x-Achse (er durchläuft die Achse mit waagrechter Tangente), schneidet sie steil bei $x = 1$ und berührt die x-Achse bei $x = 2$. Für $x \to \pm\infty$ steigt der Graph nach $+\infty$. Welche Vielfachheiten der Nullstellen bei $x = -4, 1, 2$ sind jeweils möglich? Geben Sie zwei Polynome mit allen diesen Eigenschaften an. Die beiden Polynome sollen keine Vielfachen voneinander sein. Es genügt irgendeine Rechenvorschrift für die Polynome; sie müssen nicht in der Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ geschrieben sein.

2. Eine Polynomfunktion f soll folgenden Vorzeichenverlauf haben:

$$f(x) \begin{cases} < 0, & \text{für } x < -4, \\ = 0, & \text{für } x = -4, \\ > 0, & \text{für } -4 < x < -1, \\ = 0, & \text{für } x = -1, \\ > 0, & \text{für } -1 < x < 2, \\ = 0, & \text{für } x = 2, \\ > 0, & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

   Geben Sie alle zulässigen Vielfachheiten der Nullstellen an, die dazu passen. Geben Sie ein konkretes Polynom kleinstmöglichen Grades mit diesen Eigenschaften an. Es genügt irgendeine Rechenvorschrift für die Polynome; sie müssen nicht in der Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ geschrieben sein.

3. Sie kennen die drei Messpunkte (1|3), (2|3), (3|4). Welche *lineare* Funktion passt am besten zu diesem Zusammenhang? „Am besten“ ist dabei im Sinne der „kleinsten Quadrate“ gemeint: Die Summe der quadrierten Abweichungen zwischen vorhergesagten und echten y-Werten ist so klein wie möglich.

4. Gegeben ist die Schar rationaler Funktionen g_λ mit

$$g_\lambda(x) = \frac{x^2 - 2x + 4 + \lambda}{x - 2}$$

in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von λ besitzt g_λ eine Polstelle? Für welche Werte von λ liegt eine hebbare Definitionslücke vor? Ergänzen Sie g_λ im hebbaren Fall stetig und geben Sie den entsprechenden Funktionswert $g_\lambda(2)$ an.

5. Finden Sie eine rationale Funktion f mit allen folgenden Eigenschaften:
   - Asymptote $y = x^2$,
   - eine doppelte Nullstelle bei $x = 3$,
   - eine Polstelle erster Ordnung bei $x = 4$,
   - $f(0) = 5$.

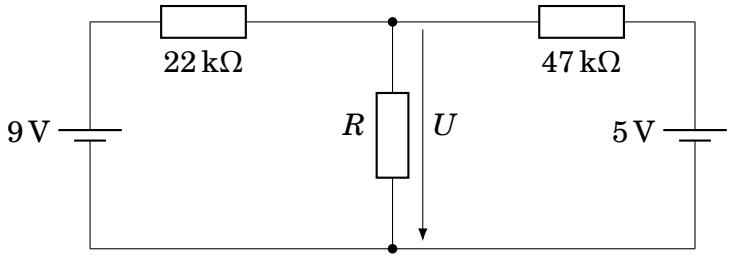
6. Finden Sie zwei verschiedene rationale Funktionen f, g mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty,$$

   die jedoch verschiedene Polstellen besitzen. Skizzieren Sie den prinzipiellen Verlauf beider Graphen.

7. Gegeben ist die Polynomfunktion $f(x) = x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 7x - 1$. Zeigen Sie: Für $x \neq 0$ gilt $x^5 f(1/x) = -f(x)$. Was folgt daraus für die Lage der Nullstellen von f?

8. Wie hängt die Spannung U in dieser Schaltung vom Widerstand R ab? Was passiert, wenn man R durch einen Draht ersetzt? Was passiert, wenn man R offen lässt?



Gemäß EN 60617-3:1996 könnten die Punkte auf den T-Verbindungen weggelassen werden.