IMA 1: Analysis. Aufgaben Woche 5

Version: 2025-11-05

This work is licensed under the Creative Commons Attribution–NonCommercial–ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/ or write to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, CA 94105, USA.

Aufgaben inspiriert von ChatGPT 5 und Gemini 2.5 Pro, bearbeitet von Jörn Loviscach

Seminargruppe A

1. Skizzieren Sie die Bildmenge der Abbildung $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, die so definiert ist:

$$t \mapsto (t\cos(t) | t\sin(t))$$

2. Drücken Sie den Flächeninhalt eines nicht notwendigerweise rechtwinkligen Dreiecks mit Hilfe von a, b und γ aus (Grundlinie mal Höhe durch 2). Drücken Sie ihn ebenfalls mit Hilfe von b, c und α aus. Welcher Zusammenhang besteht also zwischen a, c, α und γ?

3. Ein Riesenrad mit einem Radius von $R = 10\,\mathrm{m}$ dreht sich gegen den Uhrzeigersinn. Die Nabe (das Zentrum des Rades) befindet sich in einer Höhe von $H = 12\,\mathrm{m}$ über dem Boden. Wir beschreiben die Position einer Gondel durch den Winkel α, gemessen von der *tiefsten* Position des Rades aus. Finden Sie eine Formel für die Höhe $h(\alpha)$ der Gondel über dem Boden, ausgedrückt durch R, H und den Winkel α. Bei welchem Winkel α (im Bogenmaß) befindet sich die Gondel zum ersten Mal auf exakt $17\,\mathrm{m}$ Höhe?

4. Begründen Sie geometrisch, dass für alle Winkel $\alpha \in (0°; 45°)$ gilt:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

   (Diese Beziehung gilt auch für alle anderen Winkel, ist dann aber schwierig zu zeichnen.)

5. Ein Laserstrahl trifft in einem Glasprisma von innen auf eine der Seitenflächen und tritt dann gebrochen aus. Nach Snellius gilt $n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$ mit dem Einfallswinkel θ_1 und Ausfallswinkel θ_2 gemessen zum Lot auf die Fläche. Die Brechungsindizes sind $n_1 = 1{,}5$ für das Glas und $n_2 = 1{,}0$ für die Luft. Skizzieren Sie, wie der Ausfallswinkel vom Einfallswinkel abhängt. Was fällt Ihnen auf?

6. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind Flächeninhalt A und Umfang U bekannt. Wie kann man $\sin(\alpha)$ aus A und U bestimmen? Sind bei gegebenen A und U mehrere α möglich?

7. Bestimmen Sie (zum Beispiel durch Betrachten der Funktionsgraphen) die Menge aller $x \in [-1, 1]$, für die dies korrekt ist:

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

8. Drücken Sie $\cos(\arcsin(x))$ für alle $x \in [-1, 1]$ ohne trigonometrische Funktionen aus. Tipp: am rechtwinkligen Dreieck veranschaulichen.

Seminargruppe B

1. Skizzieren Sie die Bildmenge der Abbildung $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, die so definiert ist:

$$t \mapsto (\cos(3t) | \sin(2t))$$

2. In einem nicht notwendigerweise rechtwinkligen Dreieck, dessen Winkel $\alpha < 90°$ und $\gamma < 90°$ erfüllen, soll eine möglichst kurze Formel dafür gefunden werden, um wie viel c^2 von $a^2 + b^2$ abweicht, um wie viel die Formel aus dem [c1] Satz des Pythagoras hier also falsch wäre. Fällen Sie dazu das Lot von der Ecke bei Winkel β auf die Seite b. Das Lot teilt die Seite b in zwei Abschnitte. Drücken Sie die Länge dieser Abschnitte und die Höhe mit Hilfe von a, b und γ aus und wenden Sie den Satz des Pythagoras an.

[c1] *removed text by jl: der*

3. Ein Riesenrad mit Radius $R = 10\,\text{m}$ dreht sich gegen den Uhrzeigersinn. Die Nabe (das Zentrum des Rades) befindet sich auf Höhe $H = 12\,\text{m}$ über dem Boden. Wir beschreiben die Position nun durch den Winkel ϕ, gemessen von der *horizontalen Position auf der rechten Seite* aus (Position „3 Uhr“). Finden Sie eine Formel für die Höhe $h(\phi)$. Bei welchem Winkel ϕ (im Bogenmaß) befindet sich die Gondel zum ersten Mal auf exakt 17 m Höhe?

4. Begründen Sie geometrisch, dass für alle Winkel $\alpha \in (0°; 45°)$ die Gleichung

$$\cos(2\alpha) = \big(\cos(\alpha)\big)^2 - \big(\sin(\alpha)\big)^2$$

gilt und deshalb wegen Pythagoras auch diese Gleichung gilt:

$$\big(\sin(\alpha)\big)^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2\alpha)$$

(Diese Beziehungen gelten auch für alle anderen Winkel, sind dann aber schwierig zu zeichnen.)

5. Betrachten Sie die Kantenvektoren eines gedreht liegenden gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1 und begründen Sie damit, dass für alle Winkel α gilt:

$$\sin(\alpha) + \sin(\alpha + 120°) + \sin(\alpha + 240°) = 0$$

(Daraus folgt, dass die Summe der Momentanwerte der Sternspannungen von Drehstrom null ist, so dass der Nullleiter im Idealfall nicht belastet wird, und – mit Hilfe der vorigen Aufgabe – dass die Summe der Quadrate dieser Momentanwerte konstant ist, so dass die Leistung konstant ist.)

6. Von einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $c = 1$ sind Flächeninhalt A und Umfang U bekannt. Zeigen Sie, dass der Zusammenhang $(U - 1)^2 = 1 + 4A$ gilt.

7. Begründen Sie mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 1 und x, dass für $x > 0$ gilt:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) = \tfrac{\pi}{2}$$

Gilt das auch für $x < 0$?

8. Drücken Sie $\tan(\arccos(x))$ für alle $x \in [-1, 1]$ ohne trigonometrische Funktionen aus. Tipp: am rechtwinkligen Dreieck veranschaulichen.