IMA 1: Analysis. Aufgaben Woche 6

Version: 2025-11-08

This work is licensed under the Creative Commons Attribution–NonCommercial–ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/ or write to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, CA 94105, USA.

[c1] *Aufgaben inspiriert von ChatGPT 5 und Gemini 2.5 Pro, bearbeitet von Jörn Loviscach*

[c1] jl: Jetzt grob nach Schwierigkeit geordnet.

Seminargruppe A

1. Welche Regeln werden in dieser Kette von Umformungen angewendet? Was ist falsch?

$$\begin{aligned} \ln(1) &= 0 \\ \ln((-1)^2) &= 0 \\ 2\cdot\ln(-1) &= 0 \\ \ln(-1) &= 0 \\ e^{\ln(-1)} &= e^0 \\ -1 &= 1 \end{aligned}$$

2. Sei $f(x) = c\cdot a^x$ mit $a > 1$. Man kenne zwei Messpunkte $(2;5)$ und $(3;7)$. Bestimmen Sie a und c.

3. Skizzieren Sie den Verlauf von $x \mapsto x^9$ und den von $x \mapsto 9^x$. An wie vielen Stellen schneiden sich beide Graphen? Versuchen Sie, die Schnittpunkte recht genau zu bestimmen. Alles ohne Rechnerhilfe!

4. Die Leistung P eines Signals wird oft als Pegel L in Dezibel (dB) im Verhältnis zu einer Referenzleistung P_0 angegeben:

$$L = 10\,\mathrm{dB}\cdot\log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

   Rechnen bzw. schätzen Sie ohne Taschenrechner: Um welchen Faktor ändert sich die Leistung P, wenn sich der Pegel um $0\,\mathrm{dB}$, $10\,\mathrm{dB}$, $20\,\mathrm{dB}$, $-10\,\mathrm{dB}$, $-20\,\mathrm{dB}$, $3\,\mathrm{dB}$, $6\,\mathrm{dB}$ bzw. $-3\,\mathrm{dB}$ ändert?

5. Eine Windturbine liefert über einen weiten Bereich an Windgeschwindigkeiten v die Leistung $P(v) = 10\,\mathrm{kWs^3m^{-3}}\cdot v^3$. Stellen Sie diesen Zusammenhang ohne Rechnerhilfe in einem doppelt-logarithmischen Diagramm (also beide Achsen logarithmisch) dar.

6. Bestimmen Sie alle x, die dies erfüllen:

$$\lg(x) + \lg(2x+1) = \lg(3x-2)$$

   Welche x sind hier überhaupt wegen der Definitionsmenge des lg nur erlaubt?

7. In einem Halblog-Diagramm (x logarithmisch, y linear) ist der Graph der Funktion $f(x)$ eine Gerade mit Steigung $-1{,}4$ pro Dekade (d. h. Zehnerpotenz). Welche Form hat die Rechenvorschrift von f?

8. Für welche $x \geq 2$ gilt dies?
$$2^{\sqrt{x}} \leq x^{\sqrt{2}}$$

Seminargruppe B

1. Die Gleichung
$$U(t) = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$$
beschreibt die Spannung $U(t)$ an einem Kondensator, der sich über einen Widerstand entlädt. Dabei ist U_0 die Anfangsspannung zum Zeitpunkt $t = 0$ und $\tau = RC$ (kleiner griechischer Buchstabe tau) ist die sogenannte Zeitkonstante von Widerstand R und Kondensator C. Wenn man in Anlehnung an den radioaktiven Zerfall eine „Halbwertszeit“ $T_{1/2}$ als die Zeit definiert, nach der die Spannung auf die Hälfte gesunken ist, wie kann man dann $T_{1/2}$ aus τ bestimmen? Und was bedeuten die folgenden beiden Faustformeln exakt? „Nach einer Zeitkonstanten sind zwei Drittel der Ladung weg.“ „Nach fünf Zeitkonstanten ist der Kondensator praktisch leer.“

2. Der Wärmestrom durch eine Hauswand ist ungefähr proportional zur Differenz der Temperaturen innen und außen. Wenn die Außentemperatur 5 °C beträgt, die Innentemperatur am Anfang 25 °C und nach einer Stunde 20 °C beträgt: Nach welcher Zeit erreicht die Innentemperatur 10 °C? (Ohne Lüften usw.)

3. Für die Spannung U an und den Strom I durch eine Solarzelle gilt etwa:
$$I = I_P - I_S \left(e^{\frac{Ue}{kT}} - 1 \right)$$
Dabei ist I_P der vom Licht erzeugte Photostrom, I_S der Sättigungsstrom, e die Elementarladung, k die Boltzmann-Konstante, T die absolute Temperatur. Wie sieht der Verlauf von $U \mapsto I$ im Prinzip aus? Was passiert mit der Form des Graphen, wenn I_P wächst? Was, wenn T wächst? Welche Werte der Spannungen U und Ströme I sind überhaupt möglich (ausgedrückt mit I_P, I_S, e, k, T)? Welcher Strom fließt bei Kurzschluss? Welche Spannung liegt an, wenn man die Kontakte der Solarzelle unbeschaltet lässt?

4. Lösen Sie die folgende Gleichung für $x > 0$:
$$x^{\log_{10}(x)} = 1000 \cdot x^2$$

5. Münzen und Geldscheine vieler Währungen sind in Einheiten von 1, 2, 5, 10, 20, 50 usw. gestückelt. Welche mathematische Idee steckt dahinter? Wie müsste die Stückelung zwischen 1 und 10 sein, wenn sie exakt gleichmäßig sein soll?

6. Die Quadrate der Umlaufzeiten T der Planeten sind proportional zu den dritten Potenzen der großen Halbachsen a ihrer Bahnen: $T^2 \propto a^3$. Wie sieht dieser Zusammenhang in einem doppelt-logarithmischen Diagramm aus?

7. Der Schalldruckpegel in Luft ist definiert als

$$L_p = 20\,\mathrm{dB}\log_{10}(\tilde{p}/20\mu\mathrm{Pa}),$$

wobei $\tilde{p}$ der Wechseldruck ist („20 μPa Wechseldruck“ wie „230 V Wechselspannung“). Für die Geräusche, die von Windturbinen in reinen Wohngebieten ankommen, ist nachts ein Schalldruckpegel L_p von 35 dB erlaubt (eigentlich dB(A) mit einem „A“, aber das führt jetzt zu weit). Welchem Wechseldruck entspricht das? Schätzen Sie ohne Rechner! Wie viel Prozent des Atmosphärendrucks sind das?

8. Man sammelt „alle möglichen“ Zahlen zusammen – aus Börsenkursen, Naturkonstanten usw. – und untersucht jeweils deren höchstwertigste Ziffer $\neq 0$. So ergibt sich für 234,56 die Ziffer 2 und für 0,00456 die Ziffer 4. Sei P_n die Wahrscheinlichkeit, dass diese Ziffer bei einer zufällig gezogenen Zahl kleiner (!) als n ist, $n \in \{2,3,4,\ldots,10\}$. Bei diesen Wahrscheinlichkeiten darf es zum Beispiel keinen Unterschied machen, ob Börsenkurse in USD statt EUR angegeben sind, oder ob Naturkonstanten in Gallonen und Unzen statt in Kubikmetern und Kilogramm angegeben sind. Begründen Sie damit, dass zum Beispiel Folgendes gelten muss:

$$\begin{aligned} P_{10} &= 1 \\ P_4 - P_2 &= P_2 \\ P_6 - P_3 &= P_2 \\ P_9 - P_3 &= P_3 \\ P_{10} - P_5 + P_2 &= P_4 \end{aligned}$$

Welche konkrete Rechenvorschrift $n \mapsto P_n$ würde alles dies erfüllen? (Die wäre allerdings mit diesen Bedingungen noch nicht zweifelsfrei festgelegt.)