IMA 1: Analysis. Aufgaben Woche 7

Version: 2025-12-06

This work is licensed under the Creative Commons Attribution–NonCommercial–ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/ or write to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, CA 94105, USA.

[c1] *Aufgaben inspiriert von ChatGPT 5 und Gemini 2.5 Pro, bearbeitet von Jörn Loviscach*

[c1] jl: Jetzt grob nach Schwierigkeit geordnet.

Seminargruppe A

1. Wenn man die Potenzreihe der Sinusfunktion bei x^3 abbricht, kann man näherungsweise die kleinste positive Nullstelle des Sinus schätzen. Was ist damit π ungefähr?

2. Lösen Sie mittels Binomischem Lehrsatz $(1+\frac{x}{5})^5$ auf und vergleichen Sie die Summe, die Sie so erhalten, mit der Potenzreihe für e^x.

3. Schreiben Sie $\sin(3x)$ nur mit $\sin(x)$ und $\cos(x)$, ohne x noch anders zu verwenden[c2].

   [c2] *text added by jl*

4. Schreiben Sie $\big(\sin(x)\big)^4$ als Summe von Funktionen der Art $a\cos(nx)$ und $b\sin(nx)$ mit reellen Zahlen a, b und ganzen Zahlen n.

5. Wenn die Inflation p Prozent pro Jahr beträgt: Nach wie vielen Jahren sind die Preise verdoppelt? Finden Sie mit Hilfe der Zahl e eine Faustformel dafür.

6. Was sollte 2^i sein? Und gibt es darauf mehr als eine Antwort?

7. Schreiben Sie die Potenzreihe für e^x und die für e^{-x} hin und zeigen Sie durch Ausmultiplizieren bis x^3, dass das Produkt dieser beiden Potenzreihen gleich 1 ist (was natürlich der Fall sein muss, weil die Potenzrechengesetze $e^x e^{-x} = e^0 = 1$ verlangen).

8. 100 Leute sitzen in einem vollbesetzten Hörsaal. Nach einer Kaffeepause suchen sich alle zufällig wieder irgendeinen Platz. Wie groß ist in guter Näherung[c3] die Wahrscheinlichkeit, dass *niemand* denselben Platz hat wie vor der Pause? Tipp:[c4] Sei P_n die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Personen auf n Sitzplätzen nach der Pause niemand auf demselben Platz wie vorher sitzt, und sei Q_n die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Personen auf n Sitzplätzen nach der Pause *alle* auf demselben Platz wie vorher sitzen. Begründen Sie:

   [c3] *text added by jl*

   [c4] *text added by jl*

   $$P_n = 1 - Q_1 P_{n-1} - Q_2 P_{n-2} - Q_3 P_{n-3} - Q_4 P_{n-4} - \cdots$$

   Bestimmen Sie dann eine Rechenvorschrift für Q_n und nehmen Sie an, dass sich P_n für großes n immer mehr einer von n unabhängigen Zahl p nähert.

Seminargruppe B

1. Wenn man die Potenzreihe der Cosinusfunktion bei x^2 abbricht, kann man näherungsweise die kleinste positive Nullstelle des Cosinus schätzen. Was ist damit π ungefähr?

2. Lösen Sie mittels Binomischem Lehrsatz $(1+\frac{x}{6})^6$ auf und vergleichen Sie die Summe, die Sie so erhalten, mit der Potenzreihe für e^x.

3. Schreiben Sie $\cos(4x)$ nur mit $\sin(x)$ und $\cos(x)$, ohne x noch anders zu verwenden[c1].

4. Schreiben Sie $\big(\sin(x)\big)^3$ als Summe von Funktionen der Art $a\cos(nx)$ und $b\sin(nx)$ mit reallen Zahlen a, b und ganzen Zahlen n.

5. In einer radioaktiven Probe zerfallen im Mittel (im Mittel!) drei Atome pro Sekunde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der nächsten Sekunde genau vier Atome zerfallen?[c2]

6. Schreiben Sie die Potenzreihe für e^x und die für e^y hin und zeigen Sie durch Ausmultiplizieren bis x^3 bzw. y^3 dass das Produkt dieser beiden Potenzreihen gleich e^{x+y} ist (was natürlich der Fall sein muss, weil die Potenzrechengesetze $e^x e^y = e^{x+y}$ verlangen).

7. Was sollte i^i sein? Und gibt es darauf mehr als eine[c3] Antwort?

8. Die Eulersche Formel liefert $\sqrt{2}\,e^{i\pi/4} = 1+i$. Warum? Was sollte also $\ln(1+i)$ sein? Ist das eindeutig? Und was liefert die Potenzreihe für $\ln(1+i)$ damit als Formel für π? (Hinweis für Fortgeschrittene: Wir sitzen genau auf dem Konvergenzradius, aber das klappt hier gerade noch.)

[c1] *text added by jl*

[c2] jl: Eine radioaktive Probe lässt einen Geigerzähler im Mittel (im Mittel!) *drei*mal pro Sekunde ticken. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in der nächsten Sekunde genau *vier*mal tickt?

[c3] *removed text by jl: r*