IMA 1: Analysis. Aufgaben Woche 8

Version: 2025-11-07

This work is licensed under the Creative Commons Attribution–NonCommercial–ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/ or write to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, CA 94105, USA.

Aufgaben inspiriert von ChatGPT 5 und Gemini 2.5 Pro, bearbeitet von Jörn Loviscach

Seminargruppe A

1. Untersuchen Sie, ob und, wenn ja, wohin diese Folge für $n \to \infty$ konvergiert:

$$\frac{\sin(n^3) + n^2}{4n^3 + e^{-n}}$$

2. Gegeben ist die Funktion g mit

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ 2, & x = 1, \\ 2 - (x-1), & x > 1. \end{cases}$$

   Ändern Sie einen der drei Fälle so ab, dass g in $x = 1$ stetig wird. Begründen Sie Ihre Wahl.

3. Interpretieren Sie die periodische Dezimalzahl 0,1111… als geometrische Reihe. Gegen welche Zahl konvergiert diese Reihe? Was ist damit der Wert der periodischen Dezimalzahl 0,9999… kompakt geschrieben?

4. Konvergiert die Folge $n \cdot \sin(\frac{\pi}{n})$ für $n \to \infty$? Falls ja, gegen welchen Grenzwert? Ansatz 1: Wie verhält sich der Sinus für Winkel nahe null? Ansatz 2: Stellen Sie sich ein regelmäßiges n-Eck vor, das in einen Kreis mit Radius $r = 1$ einbeschrieben ist. Wo finden Sie dort diese Folge wieder?

5. Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \sin(\tfrac{1}{x}) \text{ für } x \neq 0.$$

   Ist die Definitionslücke bei $x = 0$ stetig hebbar? Begründung!

6. Der schnelle Läufer Achilles tritt gegen eine Schildkröte an. Da er fair ist, gibt er ihr 100 m Vorsprung. Achilles läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v_A = 10\,\text{m/s}$, die Schildkröte mit $v_S = 1\,\text{m/s}$. Zenons Paradoxon lautet: Um die Schildkröte einzuholen, muss Achilles erst die 100 m bis zu ihrem Startpunkt zurücklegen. In dieser Zeit hat sich die Schildkröte aber ein Stück weiterbewegt. Nun muss Achilles diese neue, kürzere Distanz überwinden, während der die Schildkröte wieder ein kleines Stück vorankommt, und so weiter ins Unendliche. Klingt, als würde er sie nie einholen. Lösen wir das Problem mit Reihen.

(a) Welche Zeit t_0 braucht Achilles für die ersten 100 m? Welche Distanz d_1 legt die Schildkröte in dieser Zeit zurück?

(b) Welche Zeit t_1 braucht Achilles, um diese neue Distanz d_1 zurückzulegen? Welche Distanz d_2 legt die Schildkröte in dieser Zeit t_1 zurück?

(c) Zeigen Sie, dass die Folge der Zeitintervalle $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die Achilles für die jeweilige Reststrecke braucht, eine geometrische Folge ist. Welches q hat sie?

(d) Die Gesamtzeit T, die Achilles zum Einholen braucht, ist die Summe all dieser Zeitintervalle: $T = \sum_{n=0}^{\infty} t_n$. Berechnen Sie den Wert dieser geometrischen Reihe. Was bedeutet das für das „Paradoxon“?

7. Eine Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 1.$$

Erraten Sie zunächst (ohne Rechnung) einen möglichen Grenzwert L aus dem Rekursionsgesetz. Zeigen Sie dann rechnerisch: Falls die Folge konvergiert, muss sie gegen genau diesen Wert konvergieren. Weisen Sie nach, dass die Folge tatsächlich gegen L konvergiert.

8. Zeigen Sie mit Hilfe der bekannten Reihe für e^x, dass die Folge $\frac{e^n}{n^{23}}$ gegen ∞ divergiert, dass also e^x schneller wächst als x^{23}.

Seminargruppe B

1. Untersuchen Sie, ob und, wenn ja, wohin diese Folge für $n \to \infty$ konvergiert:

$$\frac{n^{-3} + 4n^2}{\sqrt{3 + 5n^4}}$$

2. Betrachten Sie die Funktion f, die gegeben ist durch:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2, \\ a, & x = 2, \\ x + b, & x > 2. \end{cases}$$

Wie sind die Konstanten a und b zu wählen, so dass f stetig ist?

3. Interpretieren Sie die periodische Dezimalzahl 0,01010101… als geometrische Reihe. Gegen welche Zahl konvergiert diese Reihe? Was ist damit der Wert der periodischen Dezimalzahl 0,23232323… kompakt geschrieben?

4. Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ für } x \neq 0.$$

Ist die Definitionslücke bei $x = 0$ stetig hebbar? Begründung!

5. Verwenden Sie, was Sie über die Eigenschaften der Exponentialfunktion wissen, um das Verhalten von
$$\frac{e^x - 1}{x}$$
für $x \to 0$ zu untersuchen.

6. Eine Folge sei rekursiv definiert durch
$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$
Erraten Sie zunächst einen möglichen Grenzwert L aus diesem Rekursionsgesetz. Zeigen Sie dann rechnerisch: Falls die Folge konvergiert, muss sie gegen genau diesen Wert konvergieren. Weisen Sie nach, dass die Folge tatsächlich gegen L konvergiert.

7. Eine Folge soll diese Rekursionsgleichung erfüllen:
$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots$$
Angenommen, $x_n = A \cdot B^n$ mit Konstanten A und B. Was folgt für A und B aus der Rekursionsgleichung? Finden Sie damit eine Rechenvorschrift für x_n, so dass $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

8. Offensichtlich gilt $\frac{e^x}{x} \to \infty$ für $x \to \infty$. Substituieren Sie $x = \ln(u)/23$ für $u \to \infty$. Welchen anderen Grenzwert können Sie damit herleiten?