IMA 1: Analysis. Aufgaben Woche 9

Version: 2025-11-16

This work is licensed under the Creative Commons Attribution–NonCommercial–ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/ or write to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, CA 94105, USA.

Aufgaben inspiriert von ChatGPT 5.1 und Gemini 2.5 Pro, bearbeitet von Jörn Loviscach

Seminargruppe A

1. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$x \mapsto \ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right)$$

für $-1 < x < 1$ nur mit den Regeln im Skript zu Woche 9. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zusammen.

2. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $x \mapsto \sqrt[x]{x}$ nur mit den Regeln im Skript zu Woche 9.

3. Bestimmen Sie die Ableitung der Arkuscosinusfunktion nur mit den Regeln im Skript zu Woche 9. Schreiben Sie das Ergebnis ohne trigonometrische Funktionen.

4. Ein ohmscher Widerstand $R = 47\,\mathrm{k\Omega}$ und ein Kondensator $C = 100\,\mu\mathrm{F}$ sind in Reihe geschaltet. Man legt an diese Schaltung die Wechselspannung $u(t) = 10\,\mathrm{V}\cdot\sin(314\,\frac{1}{s}\,t)$ an. Für die Spannung $u_C(t)$ und den Strom $i_C(t)$ an einem Kondensator gilt in dessen Verbraucherzählpfeilsystem:

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}.$$

Bestimmen Sie die Amplitude der Spannung über dem Kondensator.

5. Bestimmen Sie reelle Konstanten $a, b > 0$ so, dass der Graph der Funktion $f(x) = a \cdot \ln(bx)$ an der Stelle $x_0 = 1/2$ die Gerade $y = 2x - 1$ als Tangente besitzt.

6. Geben Sie eine Rechenvorschrift für eine Polynomfunktion zweiten Grades an, die an irgendeiner Stelle die Gerade $y = -3x + 5$ als Tangentengerade hat.

7. Begründen Sie mit Hilfe der Definition der Ableitung als Grenzwert: Jede *gerade* differenzierbare Funktion, die um $x = 0$ herum definiert ist, muss an $x = 0$ die Ableitung 0 haben.

8. Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist bekanntermaßen wegen ihres Knicks bei $x = 0$ nicht differenzierbar. Wir wollen nun die Betragsfunktion um $x = 0$ herum so glätten, dass insgesamt eine differenzierbare Funktion entsteht. Sei a eine kleine positive Zahl. Ersetzen Sie die „???“ in der folgenden Rechenvorschrift so, dass die Funktion f überall differenzierbar ist:

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{falls } x < -a \vee x > a, \\ ???, & \text{falls } -a \le x \le a. \end{cases}$$

Seminargruppe B

1. Betrachten Sie für $a > 0$ die Funktionsschar f_a mit
$$f_a(x) = \frac{e^{ax} - 1}{e^{ax} + 1}.$$
Wie sieht der Graph von f_1 prinzipiell aus? Wie wirkt der Parameter a auf die Form des Graphen? Bestimmen Sie f_a'. Wie verläuft der Graph davon?

2. Ein Kondensator $C_1 = 47\,\mu\text{F}$ und ein Kondensator $C_2 = 100\,\mu\text{F}$ sind in Reihe geschaltet. Man legt an diese Schaltung die Wechselspannung $u(t) = 10\,\text{V} \cdot \sin(314\,\frac{1}{s}\,t)$ an. Für die Spannung $u_C(t)$ und den Strom $i_C(t)$ am einem Kondensator gilt in dessen Verbraucherzählpfeilsystem:
$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}.$$
Bestimmen Sie die Amplitude der Spannung über dem zweiten Kondensator.

3. Bestimmen Sie reelle Konstanten a und b so, dass die Funktion $x \mapsto a\,e^{bx}$ an irgendeiner Stelle die Gerade $y = -3x + 5$ als Tangentengerade hat.

4. Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln, dass die Ableitung f' einer *ungeraden* differenzierbaren Funktion immer eine *gerade* Funktion ist.

5. Die e-Funktion ist bekanntermaßen gleich ihrer Ableitung. Aber dies ist nicht die einzige Funktion mit dieser Eigenschaft! Angenommen eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist gleich ihrer Ableitung f'. Bestimmen Sie die Ableitung von $\ln(f(x))$ und zeigen Sie damit, welche Funktionen f hier möglich sind.

6. Eine Funktion f ist stückweise wie folgt definiert, mit noch unbekannten Parametern a, b, c:
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{4}), & x < 0, \\ ax^2 + bx + c, & x \geq 0. \end{cases}$$
Wie kann man a, b, c so wählen, dass f überall differenzierbar ist?

7. Begründen Sie mit Hilfe der Definition der Ableitung als Grenzwert: Eine *monoton wachsende* differenzierbare Funktion kann nirgendwo eine negative Ableitung haben.

8. Bestimmen Sie die Ableitung der Arkustangensfunktion nur mit den Regeln im Skript zu Woche 9. Schreiben Sie das Ergebnis ohne trigonometrische Funktionen.