# IMA 1: Analysis. Aufgaben Woche 10

Version: 2026-01-14

This work is licensed under the Creative Commons Attribution–NonCommercial–ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/ or write to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, CA 94105, USA.

*Aufgaben teilweise inspiriert von ChatGPT 5.1 und Gemini 3 Pro Preview, bearbeitet von Jörn Loviscach*

## Seminargruppe A

1. Schätzen Sie $\frac{1}{4{,}003^2}$ mit Hilfe einer linearen Näherung. Geben Sie auch eine Schranke für deren Fehler an.

2. Ein hochgenauer Widerstand von $10\,\mathrm{k}\Omega$ ist parallel zu einem Widerstand von $22\,\mathrm{k}\Omega$ geschaltet. Der letztere Widerstand hat eine Toleranz von $10\,\%$. Wie hoch ist die Toleranz des Gesamtwiderstands der Parallelschaltung? Argumentieren Sie mit linearer Näherung.

3. Gegeben sind die drei Punkte $(x_0 - h|y_{-1})$, $(x_0|y_0)$ und $(x_0 + h|y_1)$ mit einem $h > 0$. Finden Sie $a$, $b$, $c$, so dass die drei Punkte auf dem Graphen der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ liegen. Leiten Sie damit die zentrale Differenzenformel für die *erste* Ableitung an $x_0$ her.

4. Berechnen Sie für eine kubische Parabel, wie stark die zentrale Differenzenformel für die *zweite* Ableitung vom korrekten Wert abweicht.

5. Für Winkel $x$ nahe 0 gilt die lineare Näherung $\sin(x) \approx x$. Für welchen Winkel $x > 0$ wird erstmals $|\sin(x) - x| \geq 0{,}01$?

6. Wir wollen mit linearer Näherung $\sqrt{30{,}5}$ schätzen. Verspricht die Stützstelle $x_0 = 25$ oder aber die Stützstelle $x_0 = 36$ ein genaueres Ergebnis? Begründung!

7. Beschreiben Sie, wie man die Gleichung $e^x = \sin(x)$ mit dem Newton-Verfahren lösen kann. Welche Probleme könnten hier auftreten, wenn man das Newton-Verfahren tatsächlich ausführt?

8. Finden Sie eine Funktion und einen Startwert, so dass das Newton-Verfahren für diese Funktion und diesen Startwert nicht zu einer Nullstelle läuft, sondern ins Unendliche läuft. Die Funktion soll aber eine Nullstelle haben.

## Seminargruppe B

1. Schätzen Sie $\frac{1}{2+\ln(1{,}003)}$ mit Hilfe einer linearen Näherung. Geben Sie auch eine Schranke für deren Fehler an.

2. Eine Windturbine hat im Bereich unterhalb ihrer Nennleistung die Leistung $P(v) = Cv^3$, wobei $v$ die Windgeschwindigkeit und $C$ eine anlagenspezifische Konstante sind. Angenommen, die Windgeschwindigkeit wächst um 1 %. Um wie viel Prozent wächst die Leistung? Argumentieren Sie mit linearer Näherung.

3. Gegeben sind die drei Punkte $(x_0 - h|y_{-1})$, $(x_0|y_0)$ und $(x_0 + h|y_1)$ mit einem $h > 0$. Finden Sie $a$, $b$, $c$, so dass die drei Punkte auf dem Graphen der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ liegen. Leiten Sie damit die zentrale Differenzenformel für die *zweite* Ableitung an $x_0$ her.

4. Berechnen Sie für eine kubische Parabel, wie stark die zentrale Differenzenformel für die *erste* Ableitung vom korrekten Wert abweicht.

5. Beschreiben Sie, wie man die Gleichung $x^2 = \cos(x)$ mit dem Newton-Verfahren lösen kann. Welche Probleme könnten hier auftreten, wenn man das Newton-Verfahren tatsächlich ausführt?

6. Finden Sie eine Funktion, so dass das Newton-Verfahren für diese Funktion und den Startwert $x_0 = 1$ nicht zu einer Nullstelle läuft, sondern die Folge 1, −1, 1, −1, ... an $x$-Werten liefert.

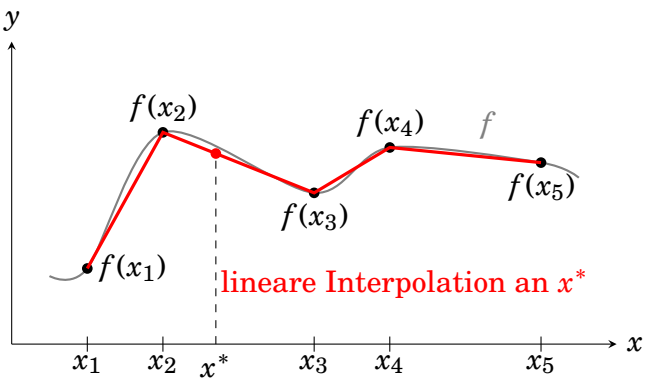
7. Ein Sensor liefert Messwerte eines Stroms $i(t)$ zu den Zeitpunkten

$$t_{-1} = 0{,}0\,\text{ms}, \quad t_0 = 1{,}0\,\text{ms}, \quad t_1 = 3{,}0\,\text{ms}$$

mit den zugehörigen Werten

$$i_{-1} = 2{,}0\,\text{mA}, \quad i_0 = 2{,}4\,\text{mA}, \quad i_1 = 3{,}1\,\text{mA}.$$

Schätzen Sie die Zeitableitung des Stroms bei $t = 1{,}0\,\text{ms}$.

8. Sie wollen in einem Mikrocontroller eine Funktion nähern, indem Sie eine Tabelle von $N$ exakten Punkten $(x_1|f(x_1)), \ldots, (x_N|f(x_N))$ mit $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$ anlegen, die dann zum Schätzen der dazwischen liegenden Funktionswerte mit geraden Stücken verbunden werden (lineare Interpolation). Diskutieren Sie, nach welchem Kriterium man die $x$-Werte wählen sollte. Deren Anzahl $N$ und deren Bereich $[x_1, x_N]$ sind fest vorgegeben. [c1]

[c1] jl: In der Abbildung sind die $x$ nun ungleichmäßig verteilt, um das Prinzip klar zu machen.