IMA 1: Analysis. Aufgaben Woche 11

Version: 2025-12-10

This work is licensed under the Creative Commons Attribution–NonCommercial–ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/ or write to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, CA 94105, USA.

Aufgaben teilweise inspiriert von ChatGPT 5.1 und Gemini 3 Pro Preview, bearbeitet von Jörn Loviscach

Seminargruppe A

1. Richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten!

   (a) „Wenn $f'(x_0) = 0$ ist, habe ich dort auf jeden Fall ein Maximum oder Minimum gefunden."

   (b) „Eine Funktion ist konvex (linksgekrümmt), wenn ihre Ableitung immer größer wird."

   (c) „Wenn $f''(x_0) = 0$ ist, liegt dort sicher ein Wendepunkt vor."

   (d) „Der Krümmungsradius einer Geraden ist 0, da sie gar nicht gekrümmt ist."

2. Betrachten Sie die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ für reelle Konstanten a und b. Was muss für a und b gelten, damit der Graph ein lokales Maximum besitzt?

3. Geben Sie für jede Teilaufgabe eine Rechenvorschrift für f an, die die gewünschte Eigenschaft erfüllt. Skizzieren Sie grob den Graphen zur Kontrolle:

   (a) Eine stetige Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit einem lokalen Minimum, aber ohne globales Minimum.

   (b) Eine stetige Funktion $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ mit einem globalen Minimum, aber ohne globales Maximum.

   (c) Eine stetige und differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die genau zwei stationäre Punkte besitzt, die *keine* Extrempunkte sind.

4. Zwischen der Spannung U und dem Strom I an einer Solarzelle besteht der Zusammenhang $I = A - B(e^{CU} - 1)$ mit positiven Konstanten A, B, C. Es ist die Spannung U gesucht, für die die Leistung $P = U \cdot I$ maximal wird. Stellen Sie eine möglichst kompakte Gleichung für diese Spannung auf. (Diese Gleichung lässt sich nicht algebraisch auflösen.)

5. Finden Sie eine Funktion, deren Graph die Kreislinie eines Halbkreises mit Radius R ist. Überzeugen Sie sich, dass die Formel für den Krümmungsradius für diese Funktion überall den Wert R ergibt.

6. An welcher Stelle hat der Graph des natürlichen Logarithmus den kleinsten Krümmungsradius?

Seminargruppe B

1. Richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten!

   (a) „An einem Sattelpunkt ist der Krümmungsradius unendlich.“

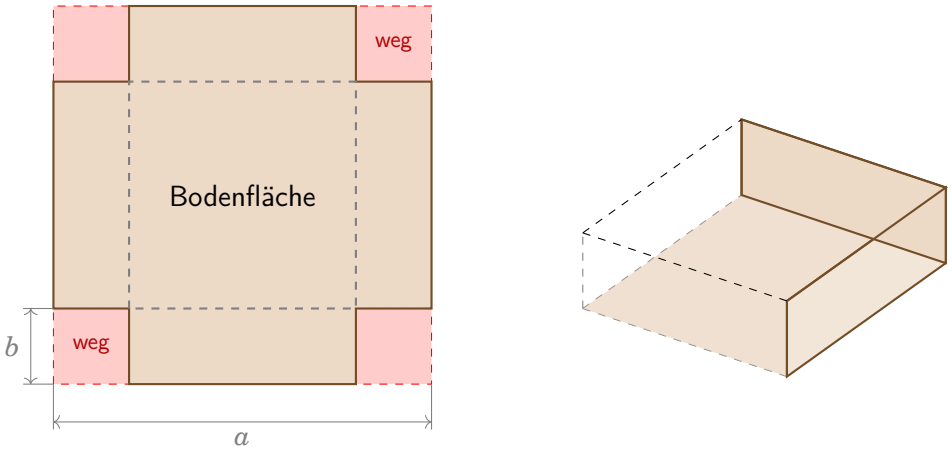
   (b) „Eine Polynomfunktion dritten Grades hat immer genau einen Wendepunkt.“

   (c) „Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann kann die Funktion kein globales Maximum haben.“

   (d) „Wenn ich die zweite Ableitung an einer Extremstelle nicht berechnen will, kann ich stattdessen schauen, ob die erste Ableitung ihr Vorzeichen wechselt.“

2. An einer Gleichspannungsquelle von 10 V sind in Reihe ein Widerstand von 1 kΩ und ein noch zu bestimmender Widerstand R angeschlossen. Wie ist R zu wählen, damit der eine größtmögliche Wärmeleistung abgibt?

3. Von einer quadratischen Pappe der Seitenlänge a sollen an den Ecken vier gleich große Quadrate der Seitenlänge b abgeschnitten werden, so dass das Volumen der daraus gefalteten offenen Kiste maximal ist.



4. Der Wind strömt mit Geschwindigkeit v_1 auf eine Windturbine zu. Die Windturbine bremst ihn auf die Geschwindigkeit v_2 ab. Dann gilt für die Leistung P, die die Windturbine abgibt:
$$P = \tfrac{1}{2}\rho A \tfrac{v_1+v_2}{2}(v_1^2 - v_2^2),$$
denn ein Luftpaket der Masse m hat vor der Turbine die kinetische Energie $\frac{1}{2}mv_1^2$, nach der Turbine die kinetische Energie $\frac{1}{2}mv_2^2$, und die Luft bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\frac{v_1+v_2}{2}$ durch den Rotor der Fläche A, so dass der Massenstrom durch die Rotorfläche gleich $\rho A \frac{v_1+v_2}{2}$ ist. Bestimmen Sie, auf welche Geschwindigkeit v_2 die Windturbine den Wind abbremsen sollte, um eine maximale Leistungsausbeute zu erreichen. Und wie hoch ist diese maximale Leistungsausbeute?

5. Finden Sie den Punkt $(x|y)$ auf der Normalparabel $y = x^2$, der dem Punkt $(3|0)$ am nächsten liegt. Minimieren Sie dazu den Abstand (also die Länge des Differenzvektors) zwischen dem gesuchten Punkt und dem Punkt $(3|0)$.

6. Gegeben ist die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto x^3$. Bestimmen Sie Radius und Mittelpunkt des Schmiegekreises an den Graphen dieser Funktion beim Punkt $(2|8)$.