IMA 1: Analysis. Aufgaben Woche 12

Version: 2025-12-22

This work is licensed under the Creative Commons Attribution–NonCommercial–ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/ or write to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, CA 94105, USA.

Aufgaben teilweise inspiriert von ChatGPT 5.2 und Gemini 3 Pro Preview, bearbeitet von Jörn Loviscach

Seminargruppe A

1. Bestimmen Sie das Integral der Sinusfunktion über den Bereich von 0 bis 2π. Bestimmen Sie außerdem den (üblichen, also vorzeichenlosen) Flächeninhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen dieser Funktion über denselben Bereich.

2. Untersuchen Sie das Integral
$$\int_0^1 x^\alpha \, dx$$
für festes $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche α ist dieses (ggf. uneigentliche) Integral endlich?

3. Berechnen Sie $A(b) = \int_0^b \cos(x)\,dx$ für allgemeines $b \in \mathbb{R}$ und skizzieren Sie $A(b)$ in Abhängigkeit von b.

4. Gegeben ist diese Funktion f:
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x < 4 \\ 4, & \text{falls } 4 \le x \le 8 \\ 0, & \text{falls } x > 8 \end{cases}$$
Betrachten Sie die Flächenfunktion $A(b) = \int_3^b f(x)\,dx$. Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf von f und A.

5. Definieren Sie für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einen gleitenden Mittelwert m mittels
$$m(x) = \tfrac{1}{4} \int_{x-2}^{x+2} f(u)\,du.$$
   (a) Wenn f sehr schnell oszilliert, was erwartet man dann für m?
   (b) Was ist m für die Funktion $f : x \mapsto 23$?
   (c) Was ist m für die Funktion $f : x \mapsto 3x + 4$?

6. Für jedes $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ sei eine Treppenfunktion $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ n, & \text{falls } 0 < x \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{falls } \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases}$$

(a) Begründen Sie, dass $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ für jedes n.

(b) Begründen Sie, dass für jedes feste $x \in [0,1]$ gilt: $f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ („punktweise Konvergenz“).

(c) Warum scheinen die beiden vorgenannten Eigenschaften einander zu widersprechen?

Seminargruppe B

1. Bestimmen Sie das Integral der Funktion $f : x \mapsto x^5$ über den Bereich von -1 bis 1. Bestimmen Sie außerdem den (üblichen, also vorzeichenlosen) Flächeninhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen dieser Funktion über denselben Bereich.

2. Berechnen Sie $A(b) = \int_0^b \sin(x)\,dx$ für allgemeines $b \in \mathbb{R}$ und skizzieren Sie $A(b)$ in Abhängigkeit von b.

3. Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty x^\alpha \, dx$$

für festes $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche α ist dieses Integral endlich?

4. Gegeben ist diese Funktion f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } x < 4 \\ \frac{x}{8}, & \text{falls } 4 \le x \le 8 \\ -\frac{1}{2}, & \text{falls } x > 8 \end{cases}$$

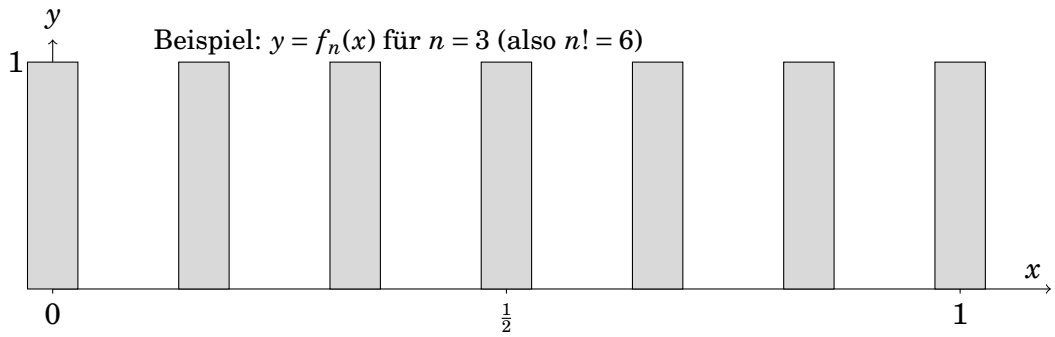
Betrachten Sie die Flächenfunktion $A(b) = \int_3^b f(x)\,dx$. Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf von f und A.

5. Gegeben ist eine Funktion f der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit konstanten a, b, c. Zeigen Sie für alle x_0, x_1, x_2, die gleichmäßig liegen ($x_1 - x_0 = x_2 - x_1 =$ eine feste Zahl h), dass $\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\Big)$. Wie kann man also das Integral einer Funktion nähern, wenn man ihre Werte an gleichmäßig liegenden Stellen x_0, x_1, x_2, …, x_N kennt (N eine gerade Zahl) und über x_0, x_1, x_2, dann über x_2, x_3, x_4 usw. jeweils die Näherung der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ anwendet? Das Ergebnis ist die Simpson-Näherungsformel.

6. Für $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ betrachten wir die Menge

$$G_n := \left\{0, \frac{1}{n!}, \frac{2}{n!}, \frac{3}{n!}, \ldots, \frac{n!-1}{n!}, 1\right\}.$$

Dann definieren wir dazu Treppenfunktionen f_n, die mittig um jedes Element von G_n einen Balken der Höhe 1 und der Breite $\frac{1}{n!n}$ haben und sonst 0 sind.



(a) Zeigen Sie, dass $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to 0$ für $n \to \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass für jede rationale Zahl q gilt: $f_n(q) \to 1$ für $n \to \infty$.

(c) Warum scheinen die beiden vorgenannten Eigenschaften einander zu widersprechen?

Anmerkung für Fortgeschrittene: Sogar für manche irrationalen (!) Zahlen x gilt $f_n(x) \to 1$ für $n \to \infty$.