IMA 1: Analysis. Skript Woche 2

Version: 2025-10-11

Skript generiert von Gemini 2.5 Pro, in Grün kommentiert und korrigiert von Jörn Loviscach

2 Grundlagen der Funktionen und Gleichungen

Willkommen im ersten Kapitel Ihrer mathematischen Reise an der ~~Universität~~ Hochschule! Bevor wir uns in die komplexeren Gebiete der Analysis und Linearen Algebra stürzen, müssen wir sicherstellen, dass unser Fundament solide ist. In diesem Kapitel wiederholen und vertiefen wir einige der wichtigsten Werkzeuge, die Sie ständig benötigen werden: Funktionen, die die Welt beschreiben, und Gleichungen, mit denen wir ihre Geheimnisse lüften. Wir werden sehen, dass selbst einfache Konzepte wie eine Gerade oder eine Parabel eine tiefe mathematische Struktur besitzen.

etwas gelabert

2.1 Lineare Funktionen – Die Gerade als Alltagsbegleiter

sehr blumig

pingelig: „affin-linear“

Die einfachste und vielleicht wichtigste Art von Funktion ist die *lineare Funktion*. Ihr Graph ist, wie der Name schon sagt, eine Gerade. Viele Prozesse in der realen Welt lassen sich zumindest annähernd linear beschreiben: der zurückgelegte Weg bei konstanter Geschwindigkeit, die Kosten in Abhängigkeit von der Stückzahl eines Produkts oder die Ausdehnung eines Metallstabs bei Erwärmung.

Eine lineare Funktion hat die allgemeine Form

$$f(x) = m \cdot x + b$$

Dabei sind m und b feste Zahlen, ~~sogenannte~~ also Parameter, die das Aussehen und die Lage der Geraden im Koordinatensystem eindeutig festlegen.

Der Parameter m wird als **Steigung** der Geraden bezeichnet. Er beschreibt, wie stark die Funktion ansteigt oder abfällt, wenn wir uns auf der x-Achse nach rechts bewegen. Stellen Sie sich vor, Sie wandern eine Bergstraße entlang. Die Steigung gibt an, wie viele Höhenmeter Sie pro horizontal zurückgelegtem Meter gewinnen oder verlieren. Eine positive Steigung ($m > 0$) bedeutet, die Gerade steigt an. Eine negative Steigung ($m < 0$) bedeutet, sie fällt. Ist die Steigung Null ($m = 0$), so verläuft die Gerade horizontal. Die Steigung können wir uns mithilfe eines *Steigungsdreiecks* veranschaulichen. Wenn wir von einem beliebigen Punkt auf der Geraden um eine Einheit nach rechts gehen ($\Delta x = 1$), so ändert sich der Funktionswert genau um den Wert der Steigung m ($\Delta y = m$).

Der Parameter b ist der **y-Achsenabschnitt**. Er gibt an, an welcher Stelle die Gerade die y-Achse schneidet. Dies ist der Funktionswert an der Stelle $x = 0$, also $f(0) = m \cdot 0 + b = b$. Man kann sich b als den „Startwert“ der Funktion vorstellen.

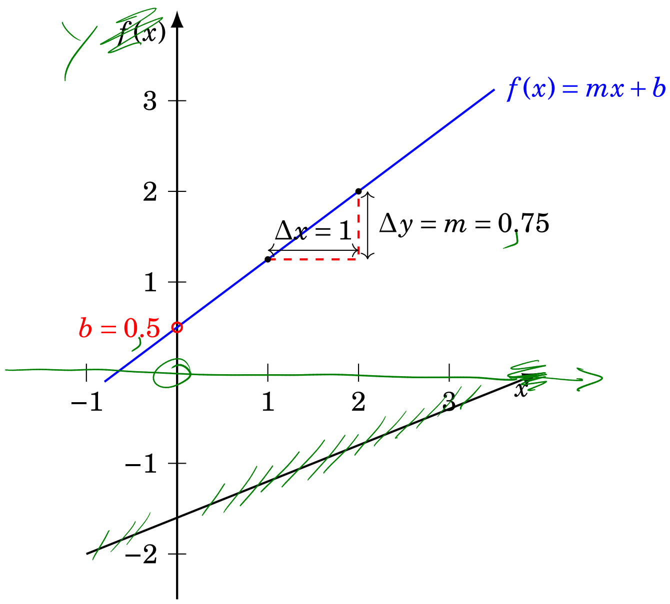


Abbildung 1: Eine lineare Funktion $f(x) = 0{,}75x + 0{,}5$ mit ihrem y-Achsenabschnitt b und einem Steigungsdreieck zur Veranschaulichung der Steigung m.

Das Lösen einer *linearen Gleichung* ist eine der grundlegendsten algebraischen Operationen. Suchen wir den Wert von x, für den die Funktion einen bestimmten Wert, sagen wir c, annimmt, so müssen wir die Gleichung $mx + b = c$ lösen. Dies geschieht durch schrittweises Umformen, auch Äquivalenzumformungen genannt, bei denen wir auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Operation ausführen, um die Variable x zu isolieren. Zuerst subtrahieren wir b auf beiden Seiten, um den Term mit x alleine stehen zu haben:

$$mx = c - b$$

Anschließend dividieren wir durch die Steigung m (vorausgesetzt, $m \neq 0$), um x freizustellen:

$$x = \frac{c - b}{m}$$

Geometrisch entspricht diese Lösung der x-Koordinate des Schnittpunktes der Geraden $f(x) = mx + b$ mit der horizontalen Linie $y = c$. Ein besonders wichtiger Fall ist das Finden der *Nullstelle*, also des Schnittpunkts mit der x-Achse. Hierfür setzen wir $c = 0$ und erhalten $x = -b/m$.

2.2 Potenz- und Wurzelfunktionen – Eine Welt voller Kurven

sehr blumig

Während lineare Funktionen konstantes Wachstum beschreiben, modellieren *Potenzfunktionen* Prozesse, bei denen sich die Änderungsrate selbst ändert. Denken Sie an die Fläche eines Quadrats, die mit der Seitenlänge quadratisch wächst, oder an die Gravitationskraft, die mit dem Quadrat des Abstandes abnimmt. Die allgemeine Form einer Potenzfunktion ist

$$f(x) = a \cdot x^n$$

wobei a ein Skalierungsfaktor ist und der Exponent n die charakteristische Form der Kurve bestimmt. Wir konzentrieren uns zunächst auf den Fall $a = 1$, also $f(x) = x^n$.

a und n sind Parameter!

2.2.1 Positive ganzzahlige Exponenten

Wenn der Exponent n eine positive ganze Zahl ist ($n = 1, 2, 3, \ldots$), beschreibt x^n das Produkt von n Faktoren des Werts x. Der Fall $n = 1$ führt uns zurück zur linearen Funktion $f(x) = x$, der Winkelhalbierenden des Koordinatensystems.

Für $n = 2$ erhalten wir die *Normalparabel* $f(x) = x^2$. Ihr Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da $(-x)^2 = x^2$ gilt. Für $n = 3$ ergibt sich die kubische Funktion $f(x) = x^3$, deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist, da $(-x)^3 = -x^3$. Dieses Symmetrieverhalten ist allgemein gültig: Für gerade Exponenten n sind die Graphen achsensymmetrisch zur y-Achse, für ungerade Exponenten n sind sie punktsymmetrisch zum Ursprung.

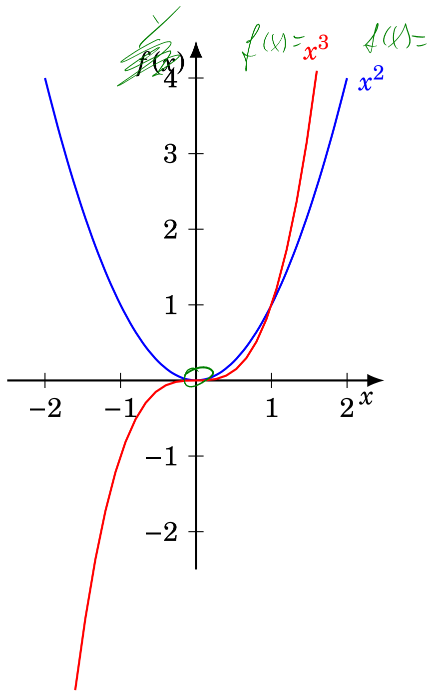


Abbildung 2: Die Graphen der Potenzfunktionen $f(x) = x^2$ (die Normalparabel, blau) und $f(x) = x^3$ (kubische Parabel, rot).

Außerdem $x^0 := 1$, damit z.B. $x^3 = x^3 \cdot 1 \overset{!}{=} x^3 \cdot x^0 = x^{3+0}$. Problemfall: $0^0 = ?$

2.2.2 Wurzelfunktionen – Die Umkehrung der Potenz

muss kursiv sein

Oftmals stellt sich die umgekehrte Frage: Welche Zahl muss ich potenzieren, um ein bestimmtes Ergebnis zu erhalten? Die Antwort darauf gibt die *Wurzelfunktion*. Die n-te Wurzel aus x, geschrieben als $\sqrt[n]{x}$, ist diejenige nicht-negative Zahl, die mit n potenziert wieder x ergibt. Die Wurzelfunktion ist also die Umkehrfunktion der Potenzfunktion (für einen eingeschränkten Definitionsbereich). Beispielsweise ist $f(x) = \sqrt{x}$ (die Quadratwurzel) die Umkehrung von $g(x) = x^2$ für $x \geq 0$. Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph der Wurzelfunktion durch Spiegelung des Graphen der Potenzfunktion an der Winkelhalbierenden $y = x$ entsteht.

Eine sehr nützliche Schreibweise für Wurzeln verwendet gebrochene Exponenten:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Hintergedanke:

$(\sqrt[7]{x})^7 = (x^{\frac{1}{7}})^7 = x^{\frac{1}{7} \cdot 7} = x^1 = x$

wenn die Potenzregeln auch hier gelten

Das sieht man für ungerades n lockerer.

Diese Schreibweise macht deutlich, dass Wurzeln und Potenzen zwei Seiten derselben Medaille sind und denselben Rechenregeln gehorchen.

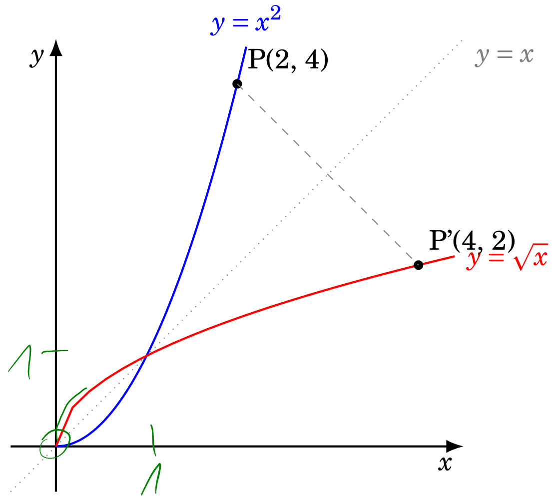


Abbildung 3: Spiegelsymmetrie von $y = x^2$ (für $x \geq 0$) und $y = \sqrt{x}$ an der Winkelhalbierenden $y = x$.

2.2.3 Negative ganzzahlige Exponenten – Das Reich der Kehrwerte

Was bedeutet ein negativer Exponent wie in x^{-2}? Die Konvention hierfür ist einfach und elegant: Ein negativer Exponent bedeutet, dass wir den Kehrwert der Potenz mit dem entsprechenden positiven Exponenten bilden.

Hintergedanke:

$x^2 = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x x}{x \cdot x x} = x^5 \cdot \frac{1}{x^3} = x^5 \cdot x^{-3} = x^{5-3}$

wenn die Rechenregeln weiter gelten

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

für $x \neq 0$!

Die wichtigste Funktion dieser Art ist $f(x) = x^{-1} = 1/x$, deren Graph als *Hyperbel* bezeichnet wird. Diese Funktion ist für $x = 0$ nicht definiert, da eine Division durch Null nicht möglich ist. Der Graph nähert sich der y-Achse für $x \to 0$ und der x-Achse für $x \to \pm\infty$ beliebig an, ohne sie jemals zu berühren. Solche Linien nennt man *Asymptoten*.

kursiv

kursiv

2.3 Die Werkzeuge der Algebra

Um mit Ausdrücken, die Potenzen enthalten, sicher umgehen zu können, benötigen wir ein festes Regelwerk. Diese Regeln, die Potenzgesetze und die binomischen Formeln, sind keine willkürlichen Vorschriften, sondern logische Konsequenzen der Definition von Potenzen.

2.3.1 Die Rechenregeln für Potenzen

Die Potenzgesetze ermöglichen es uns, Terme zu vereinfachen und umzuformen. Wir stellen die wichtigsten Gesetze vor, die für beliebige reelle Exponenten a, b gelten, solange die Basis positiv ist.

x^a ← Exponent

Basis

Werden zwei Potenzen mit gleicher Basis multipliziert, so addieren sich ihre Exponenten. Dies ist leicht einzusehen, wenn man sich die Potenzen ausgeschrieben denkt: $x^2 \cdot x^3 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^5$. Allgemein gilt:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

Wird eine Potenz erneut potenziert, so werden die Exponenten multipliziert. Zum Beispiel ist $(x^2)^3 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = x^6$. Die allgemeine Regel lautet:

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

Aus diesen beiden Regeln leiten sich alle weiteren ab. Die Division von Potenzen mit gleicher Basis führt zur Subtraktion der Exponenten: $x^a/x^b = x^a \cdot x^{-b} = x^{a-b}$. Ein Spezialfall davon erklärt, warum jede Zahl (außer Null) hoch Null gleich Eins ist: $x^0 = x^{a-a} = x^a/x^a = 1$.

oft nimmt man auch $0^0 = 1$

Wird ein Produkt potenziert, so kann man den Exponenten auf jeden Faktor einzeln anwenden:

$$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$$

Es ist jedoch ein häufiger Fehler, dies auf Summen zu übertragen. Beachten Sie unbedingt, dass $(x+y)^a$ im Allgemeinen *nicht* ~~dasselbe~~ gleiche ist wie $x^a + y^a$. Für den Spezialfall $a = 2$ gibt es eine eigene Regel, die wir als Nächstes kennenlernen.

2.3.2 Die Binomischen Formeln – Nützliche Abkürzungen

Die binomischen Formeln sind Spezialfälle des Ausmultiplizierens von Klammerausdrücken, die so häufig vorkommen, dass man sie auswendig kennen sollte. Sie sind das Fundament für viele Umformungen, insbesondere bei quadratischen Gleichungen.

Die **erste binomische Formel** beschreibt das Quadrat einer Summe:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Wer soll sich den Spruch merken?

Man merkt sich: „Das Quadrat des ersten Glieds, plus das doppelte Produkt beider Glieder, plus das Quadrat des zweiten Glieds." Dieses algebraische Gesetz hat eine wunderschöne geometrische Interpretation. Die Fläche eines Quadrats mit der Seitenlänge $(a+b)$ setzt sich zusammen aus einem Quadrat der Fläche a^2, einem Quadrat der Fläche b^2 und zwei Rechtecken der Fläche ab.

Die **zweite binomische Formel** behandelt das Quadrat einer Differenz. Man kann sie direkt aus der ersten herleiten, indem man b durch $-b$ ersetzt:

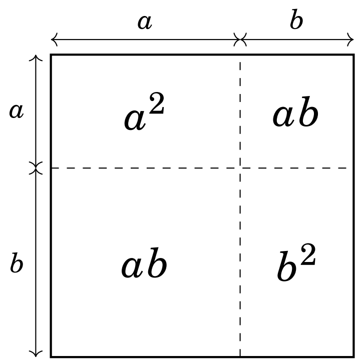
$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Der einzige Unterschied ist das negative Vorzeichen beim gemischten Term.

Die **dritte binomische Formel** entsteht beim Multiplizieren einer Summe mit der entsprechenden Differenz. Hier heben sich die gemischten Terme gegenseitig auf:

$$(a+b)(a-b) = a^2 \underbrace{- ab + ba}_{0} - b^2 = a^2 - b^2$$

Diese Formel ist besonders nützlich, um Differenzen von Quadraten in ein Produkt zu zerlegen (Faktorisieren) oder um Brüche komplexer Zahlen zu vereinfachen, indem man den Nenner ~~rational~~ reell macht.



Lustiger Fehler!

Abbildung 4: Geometrische Veranschaulichung der ersten binomischen Formel: Die Fläche $(a+b)^2$ zerfällt in a^2, b^2 und $2ab$.

2.4 Quadratische Gleichungen – Die Suche nach den Nullstellen

Eine quadratische Gleichung ist eine Gleichung, die sich auf die Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Kursiv

Parameter!

bringen lässt, wobei a, b, c feste Koeffizienten sind und $a \neq 0$ gelten muss. Das Lösen dieser Gleichung ist äquivalent zur Bestimmung der Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$. Geometrisch suchen wir also die x-Koordinaten der Schnittpunkte einer Parabel mit der x-Achse. Wie die folgende Abbildung zeigt, kann eine Parabel die x-Achse an zwei Stellen schneiden, an einer Stelle berühren oder sie komplett verfehlen. Dementsprechend kann eine quadratische Gleichung zwei, eine oder keine reelle Lösung haben.

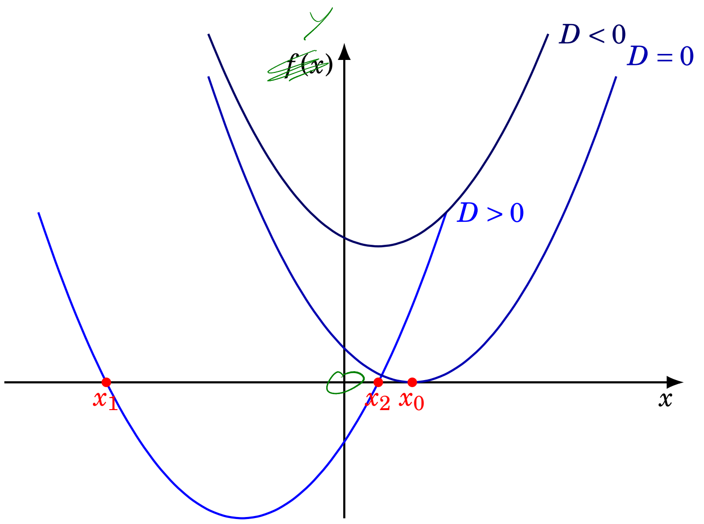


Abbildung 5: Die drei möglichen Fälle für die Anzahl der reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung, visualisiert durch die Lage der Parabel zur x-Achse.

Während einfache Fälle wie $x^2 - 9 = 0$ (Lösungen $x = \pm 3$) oder $x^2 - 5x = 0$ (durch Ausklammern von $x(x-5) = 0$ zu den Lösungen $x = 0$ und $x = 5$) leicht zu lösen sind, benötigen wir für die allgemeine Form ein mächtigeres Werkzeug.

Dieses Werkzeug ist die **Lösungsformel für quadratische Gleichungen**, oft auch „Mitternachtsformel" genannt. Sie wird durch einen Prozess hergeleitet, der sich *quadratische*

Besser zu werden: pq-Formel

$x^2 + px + q = 0$

$\iff x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{p^2}{4} - q}_{D/4}}$

Ergänzung nennt. Dabei wird die Gleichung so umgeformt, dass auf einer Seite mit Hilfe einer binomischen Formel ein vollständiges Quadrat entsteht. Das Endergebnis dieser Herleitung ist eine Formel, die uns die Lösungen direkt aus den Koeffizienten a, b und c liefert:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel, $D = b^2 - 4ac$, hat eine besondere Bedeutung und wird **Diskriminante** genannt. Ihr Vorzeichen entscheidet über die Anzahl der reellen Lösungen, genau wie in der Abbildung oben visualisiert:

- Wenn $D > 0$, ist die Wurzel eine positive reelle Zahl. Das ±-Zeichen in der Formel liefert dann **zwei verschiedene reelle Lösungen**.
- Wenn $D = 0$, ist die Wurzel Null. Das ±-Zeichen hat keine Auswirkung, und wir erhalten genau **eine reelle Lösung** (eine sogenannte „doppelte Nullstelle").
- Wenn $D < 0$, müssten wir die Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen. Im Bereich der reellen Zahlen ist dies nicht möglich. Die Gleichung hat daher **keine reelle Lösung**. (Im ~~späteren~~ Verlauf ~~Ihres Studiums~~ dieses Semesters werden Sie die komplexen Zahlen kennenlernen, die hierfür eine Lösung bieten.)

Mit dieser Formel sind Sie in der Lage, jede quadratische Gleichung systematisch zu lösen und die Anzahl ihrer Lösungen zu bestimmen, ohne den Graphen zeichnen zu müssen. Sie ist eines der fundamental~~st~~en Ergebnisse der Schulmathematik und ein unverzichtbares Werkzeug für die höhere Mathematik.