

IMA 1: Analysis. Skript Woche 3

Version: 2025-10-14



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or write to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, CA 94105, USA.

Skript generiert von Gemini 2.5 Pro, in Grün kommentiert und korrigiert von Jörn Loviscach

3 Funktionen

Der Begriff der Funktion, oft auch Abbildung genannt, ist eines der fundamentalsten Konzepte der gesamten Mathematik. Funktionen begegnen uns überall: in der Physik, um die Bewegung eines Objekts zu beschreiben, in der Informatik als Grundlage von Algorithmen oder in der Wirtschaft, um den Zusammenhang zwischen Preis und Nachfrage zu modellieren. Doch was genau *ist* eine Funktion? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir den Begriff aus verschiedenen Blickwinkeln.

3.1 Was ist eine Funktion? Vier Perspektiven

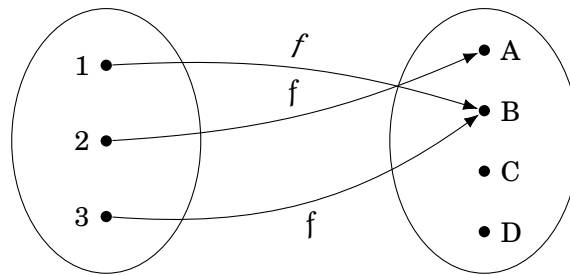
Eine formale Definition kann zu Beginn abstrakt wirken. Daher nähern wir uns dem Funktionsbegriff über vier verschiedene Vorstellungen, die jeweils einen anderen Aspekt beleuchten und zusammen ein umfassendes Bild ergeben.

3.1.1 Perspektive 1: Die Zuordnung zwischen Mengen

Die grundlegendste Vorstellung einer Funktion ist die einer eindeutigen Zuordnung zwischen den Elementen zweier Mengen. Stellen wir uns eine Menge D vor, die wir **Definitionsmenge** nennen, und eine weitere Menge Z , die wir **Zielmenge** nennen. Eine Funktion f ist nun eine Vorschrift, die **jedem** Element aus der Definitionsmenge D **genau ein** Element aus der Zielmenge Z zuordnet.

Dieses Prinzip lässt sich hervorragend mit einem **Pfeildiagramm** visualisieren. Die Elemente der Mengen werden als Punkte dargestellt und die Zuordnung durch Pfeile von D nach Z .

*oft mehrdeutig
"Bildmenge" genannt*



D (Definitionsmenge) Z (Zielmenge)

Abbildung 1: Pfeildiagramm einer Funktion f . Jedem Element aus D wird genau ein Element aus Z zugeordnet. Es ist erlaubt, dass mehrere Elemente aus D auf dasselbe Element in Z zeigen (wie 1 und 3 auf B). Es müssen aber nicht alle Elemente aus Z getroffen werden (C und D werden nicht getroffen).

Die beiden entscheidenden Regeln sind:

1. **Vollständigkeit:** Von jedem Element der Definitionsmenge D muss ein Pfeil ausgehen.
2. **Eindeutigkeit:** Von keinem Element in D dürfen zwei oder mehr Pfeile ausgehen.

3.1.2 Perspektive 2: Die verarbeitende Maschine

Eine sehr plastische Vorstellung ist die einer Maschine. Eine Funktion f ist wie eine Blackbox, die eine Eingabe entgegennimmt, diese nach einer festen Regel verarbeitet und eine Ausgabe liefert. Die erlaubten Eingaben bilden die Definitionsmenge, während die möglichen Ausgaben in der Zielmenge liegen.

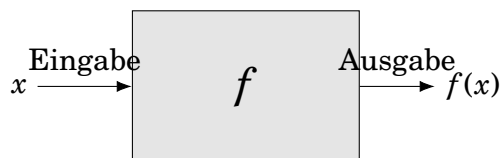


Abbildung 2: Die Funktion f als Maschine, die eine Eingabe x in eine Ausgabe $f(x)$ umwandelt.

Diese Metapher ist besonders nützlich, wenn wir an die **Rechenvorschrift** einer Funktion denken. Beispielsweise nimmt die Maschine zur Funktion $f(x) = x^2$ eine Zahl x als Eingabe, quadriert sie im Inneren und gibt das Ergebnis x^2 aus. Für die Eingabe 3 kommt die Ausgabe 9 heraus.

Die meisten Programmiersprachen basieren auf Funktionen in diesem Sinne.

3.1.3 Perspektive 3: Die Wertetabelle

In den Natur- und Ingenieurwissenschaften werden Messungen oft in Tabellen erfasst. Eine solche Tabelle kann ebenfalls eine Funktion repräsentieren, insbesondere wenn die Definitionsmenge endlich ist oder wir uns auf eine Auswahl von Werten beschränken.

Eine **Wertetabelle** listet in zwei Spalten die Eingabewerte (aus D) und die zugehörigen Ausgabewerte (aus Z) auf. Betrachten wir die Funktion, die jeder der ersten vier natürlichen Zahlen ihr Doppeltes zuordnet.

Eingabe x	Ausgabe $f(x) = 2x$
1	2
2	4
3	6
4	8

Jede Zeile der Tabelle entspricht einem Pfeil im Pfeildiagramm. Die Eindeutigkeit der Funktion bedeutet hier, dass in der ersten Spalte kein Wert doppelt vorkommen darf mit unterschiedlichen Werten in der zweiten Spalte.

3.1.4 Perspektive 4: Der Funktionsgraph

Für Funktionen, deren Definitions- und Zielmenge aus reellen Zahlen bestehen (oder Teilmengen davon), ist die grafische Darstellung als **Funktionsgraph** die anschaulichste Methode. Der Graph einer Funktion f ist die Menge aller Punkte (x, y) in einem Koordinatensystem, für die die Beziehung $y = f(x)$ gilt.

Die x -Achse repräsentiert die Definitionsmenge, die y -Achse die Zielmenge. Für jeden Wert x aus der Definitionsmenge finden wir den zugehörigen Funktionswert $f(x)$ auf der y -Achse. Der Punkt $(x, f(x))$ ist dann ein Punkt des Graphen.

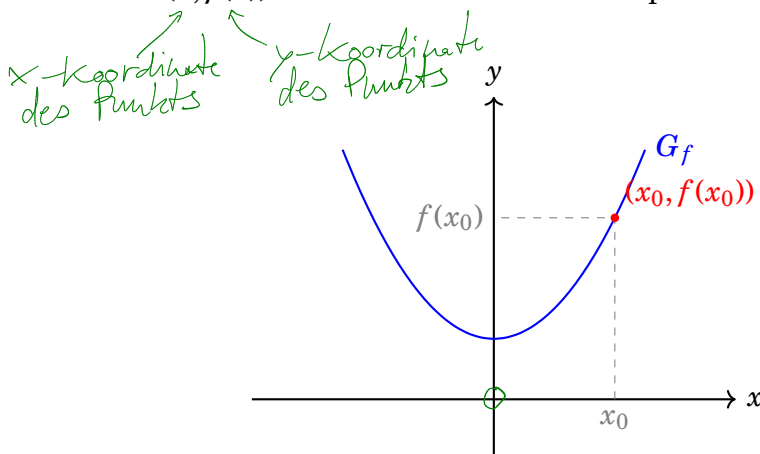


Abbildung 3: Der Graph G_f einer Funktion f . Er besteht aus allen Punkten $(x, f(x))$. Die Eindeutigkeitsregel bedeutet, dass keine vertikale Linie den Graphen mehr als einmal schneiden darf.

3.2 Grundbegriffe und Notation

Nachdem wir die verschiedenen Vorstellungen kennengelernt haben, fassen wir die zentralen Begriffe präzise zusammen.

Eine Funktion f wird formal durch die Angabe ihrer Definitionsmenge D , ihrer Zielmenge Z und einer eindeutigen Zuordnungsvorschrift beschrieben. Wir schreiben dies als:

$$f : D \rightarrow Z, \quad x \mapsto f(x)$$

Der erste Teil, $f : D \rightarrow Z$, legt die Start- und Zielmengen fest. Der Ausdruck $x \mapsto f(x)$ beschreibt die eigentliche **Rechenvorschrift**. Der Pfeil \mapsto (gelesen als „wird abgebildet auf“) verbindet ein einzelnes Element x mit seinem zugeordneten Wert $f(x)$. Es ist wichtig, zwischen der Funktion f (dem Gesamtobjekt: Maschine, Graph, Zuordnung) und dem Funktionswert $f(x)$ (der Ausgabe für eine konkrete Eingabe x) zu unterscheiden.

Die **Bildmenge** (oder kurz das Bild) einer Funktion f , geschrieben als $\text{Bild}(f)$ oder $f(D)$, ist die Teilmenge der Zielmenge Z , deren Elemente tatsächlich von der Funktion „getroffen“ werden. Formal ausgedrückt:

$$\text{Bild}(f) = \{y \in Z \mid \text{Es gibt ein } x \in D \text{ mit } f(x) = y\}$$

In Abbildung 1 besteht die Bildmenge aus den Elementen $\{A, B\}$, während die Zielmenge $\{A, B, C, D\}$ ist. Die Bildmenge ist also immer eine Teilmenge der Zielmenge, $\text{Bild}(f) \subseteq Z$.

Manchmal wird eine Funktion nicht durch eine einzige Formel für die gesamte Definitionsmenge beschrieben, sondern durch verschiedene Formeln für verschiedene Teile. Solche Funktionen nennt man **stückweise definiert**. Ein klassisches Beispiel ist die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Punkt für hier x einsetzen

Für nichtnegative Zahlen verwendet man die Vorschrift $x \mapsto x$, für negative Zahlen die Vorschrift $x \mapsto -x$. Am Übergangspunkt $x = 0$ passen beide Vorschriften zusammen.

Das muss aber nicht bei allen Funktionen so sein!

3.3 Visualisierung von Funktionen

Der Funktionsgraph ist das wichtigste Werkzeug zur Visualisierung. Heutzutage müssen wir Graphen nicht mehr mühsam von Hand zeichnen. Computerprogramme können dies schnell und präzise erledigen.

Eine populäre Methode ist die Verwendung der Programmiersprache **Python** mit den Bibliotheken „NumPy“ für numerische Berechnungen und „Matplotlib“ für das Plotten. Eine Funktion wie $f(x) = \sin(x) \cdot e^{-0.1x}$ lässt sich mit wenigen Zeilen Code darstellen.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Definiere den x-Bereich: 1000 Punkte von 0 bis 20
5 x = np.linspace(0, 20, 1000)
6
7 # Definiere die Funktion f(x)
8 def f(x):
9     return np.sin(x) * np.exp(-0.1 * x)
```

```

10
11 # Berechne die y-Werte
12 y = f(x)
13
14 # Erstelle den Plot
15 plt.figure(figsize=(8, 4))
16 plt.plot(x, y)
17 plt.title("Graph von f(x) = sin(x) * exp(-0.1x)")
18 plt.xlabel("x-Achse")
19 plt.ylabel("y-Achse")
20 plt.grid(True)
21 plt.show()

```

Listing 1: Plotten einer Funktion mit Python.

Für schnelle Visualisierungen ohne Programmieraufwand eignen sich Online-Werkzeuge wie **Wolfram Alpha**. Gibt man dort beispielsweise

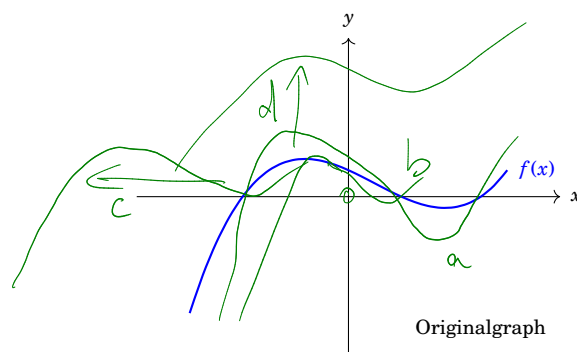
```
plot x^3 - 2*x + 1 from x=-3 to 3
```

ein, erhält man augenblicklich den Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 1$ im gewünschten Intervall.

3.4 Transformation von Graphen

Wenn der Graph einer Funktion f bekannt ist, wie kann man daraus den Graphen einer transformierten Funktion $g(x) = a \cdot f(b \cdot x + c) + d$ ableiten? Jeder der Parameter a, b, c, d hat eine spezifische geometrische Auswirkung auf den Graphen.

Wir analysieren die Effekte schrittweise, ausgehend vom Graphen von f .



- 1. Vertikale Verschiebung durch d :** Die Transformation $x \mapsto f(x) + d$ verschiebt den Graphen von f um d Einheiten **vertikal**. Für $d > 0$ erfolgt die Verschiebung nach oben, für $d < 0$ nach unten.
- 2. Horizontale Verschiebung durch c :** Die Transformation $x \mapsto f(x + c)$ verschiebt den Graphen um c Einheiten **horizontal**. Achtung: Für $c > 0$ erfolgt die Verschiebung nach **links**, für $c < 0$ nach **rechts**. Man muss für $x + c$ einen kleineren x -Wert einsetzen, um denselben Funktionswert zu erhalten.
- 3. Vertikale Skalierung und Spiegelung durch a :** Der Term $x \mapsto a \cdot f(x)$ skaliert den Graphen **vertikal** mit dem Faktor $|a|$. Wenn $|a| > 1$, wird der Graph in y -Richtung gestreckt. Wenn $0 < |a| < 1$, wird er gestaucht. Wenn $a < 0$, wird der Graph zusätzlich an der x -Achse gespiegelt.

4. **Horizontale Skalierung und Spiegelung durch b :** Der Term $x \mapsto f(b \cdot x)$ skaliert den Graphen **horizontal** mit dem Faktor $1/|b|$. Wenn $|b| > 1$, wird der Graph in x -Richtung gestaucht (um den Faktor $1/|b|$). Wenn $0 < |b| < 1$, wird er gestreckt. Wenn $b < 0$, wird der Graph zusätzlich an der y -Achse gespiegelt.

Um den Graphen von $g(x) = a \cdot f(b \cdot x + c) + d$ zu zeichnen, ~~schreibt man den Term am besten als $g(x) = a \cdot f(b(x + c/b)) + d$ und~~ ^{man} wendet die Transformationen in der Reihenfolge an: 1. Horizontale Verschiebung um $-c/b$, 2. Horizontale Skalierung mit $1/|b|$, 3. Vertikale Skalierung mit $|a|$, 4. Vertikale Verschiebung um d . Spiegelungen (falls $a < 0$ oder $b < 0$) können bei den Skalierungsschritten miterledigt werden.

Moral: Was dem x in $f(\dots)$ passiert, wirkt "falsch" herum und in "falscher" Reihenfolge.

3.5 Eigenschaften von Funktionen

Funktionen können bestimmte charakteristische Eigenschaften aufweisen, die uns helfen, sie zu klassifizieren und zu verstehen.

3.5.1 Symmetrie: Gerade und ungerade Funktionen

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit einer zur y -Achse symmetrischen Definitionsmenge D (z.B. $D = \mathbb{R}$ oder $D = [-k, k]$) heißt **gerade**, wenn für alle $x \in D$ gilt:

daher "gerade"

$$f(-x) = f(x)$$

Der Graph einer geraden Funktion ist achsensymmetrisch zur y -Achse. Beispiele sind $f(x) = x^2$ oder $f(x) = \cos(x)$.

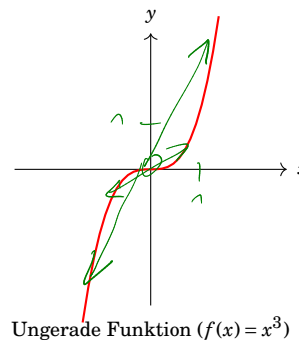
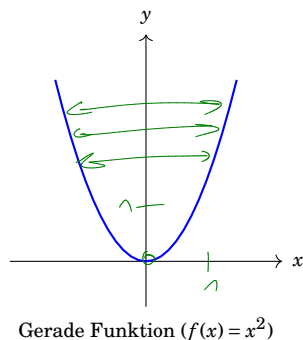
Eine Funktion heißt **ungerade**, wenn für alle $x \in D$ gilt:

daher "ungerade"

$$f(-x) = -f(x)$$

Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung $(0, 0)$. Beispiele sind $f(x) = x^3$ oder $f(x) = \sin(x)$.

Die meisten Funktionen sind weder gerade noch ungerade!



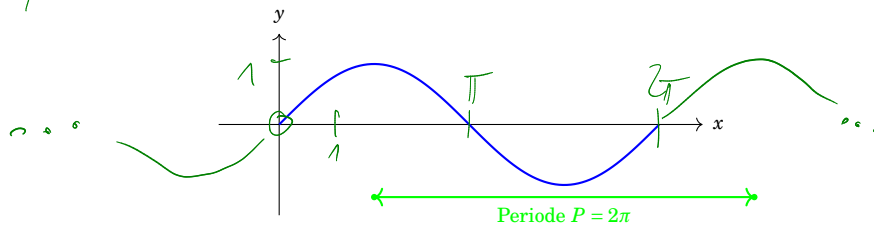
3.5.2 Periodizität

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **periodisch**, wenn es eine Zahl $P > 0$ gibt, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x + P) = f(x)$$

Die kleinste solche positive Zahl P wird die **Periode** der Funktion genannt. Der Graph einer periodischen Funktion wiederholt sich alle P Einheiten auf der x -Achse. Die bekanntesten Beispiele sind die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus, die beide die Periode 2π haben.

(Bogenmaß kommt noch!)



3.5.3 Monotonie

Die Monotonie beschreibt das ^{Wachstums}~~Steigungs~~verhalten einer Funktion. Eine Funktion f heißt auf einem Intervall $I \subseteq D$:

- **monoton wachsend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **streng monoton wachsend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$.
- **monoton fallend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **streng monoton fallend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) > f(x_2)$.

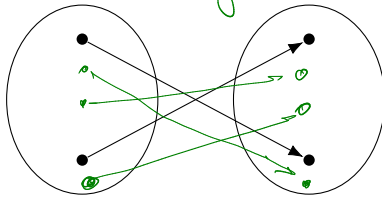
Anschaulich bedeutet streng monotonen Wachstum, dass der Graph von links nach rechts ausschließlich ansteigt. Er „darf“ zwischendurch nicht flach werden oder gar fallen.

and: Invertierbarkeit

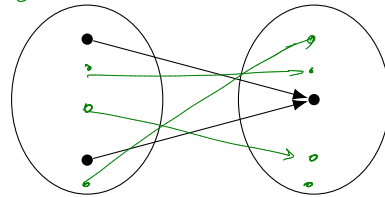
3.6 Umkehrbarkeit und die Umkehrfunktion

Wir haben gesehen, dass eine Funktion $f : D \rightarrow Z$ jedem $x \in D$ eindeutig ein $y \in Z$ zuordnet. Manchmal möchten wir diesen Prozess umkehren: Können wir zu einem gegebenen y aus der Zielmenge eindeutig dasjenige x finden, das von f auf y abgebildet wurde?

Diese Frage führt zum Konzept der **Umkehrbarkeit**. Eine Funktion ist umkehrbar, wenn die Zuordnung in beide Richtungen eindeutig ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn jedes Element der Bildmenge $\text{Bild}(f)$ von genau einem Element der Definitionsmenge getroffen wird. Solche Funktionen nennt man **injektiv**. *In der Mathematik ist man strenger und verlangt, dass die Zielmenge gleich der Bildmenge ist (surjektiv).*



Injektiv: Umkehrbar



Nicht injektiv: Nicht umkehrbar

and: inverse Funktion

Für reelle Funktionen ist eine einfache Bedingung für Injektivität (und damit Umkehrbarkeit) die **strenge Monotonie**. Wenn eine Funktion auf einem Intervall streng monoton wächst oder fällt, kann jeder y -Wert höchstens einmal angenommen werden. Der Graph einer solchen Funktion besteht den „horizontalen Linientest“: Jede horizontale Linie schneidet den Graphen höchstens einmal.

Ist eine Funktion $f : D \rightarrow Z$ umkehrbar, so existiert ihre **Umkehrfunktion** f^{-1} . Die Umkehrfunktion hat die Bildmenge von f als ihre Definitionsmenge und die Definitionsmenge von f als ihre Zielmenge: $f^{-1} : \text{Bild}(f) \rightarrow D$. Sie macht die Wirkung von f rückgängig. Es gilt:

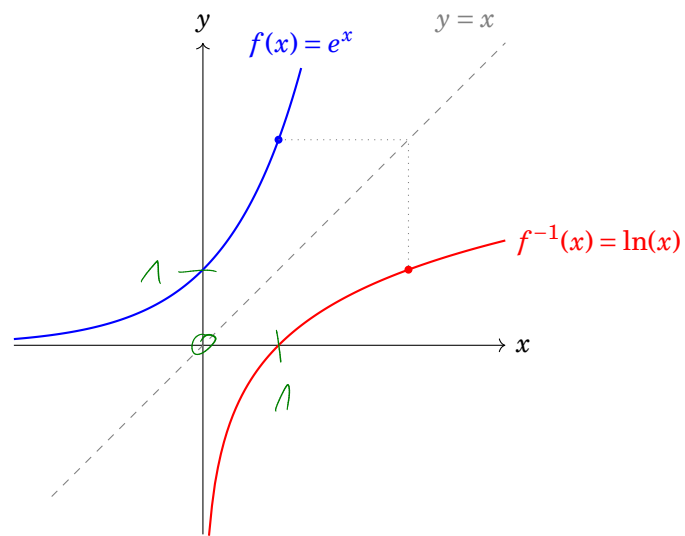
$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

Für die Komposition der Funktionen gilt: $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in D$ und $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in \text{Bild}(f)$.

Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} entsteht durch **Spiegelung des Graphen von f an der ersten Winkelhalbierenden**, also an der Geraden mit der Gleichung $y = x$. Dies liegt daran, dass die Rollen von x und y vertauscht werden: Ein Punkt (x_0, y_0) auf dem Graphen von f wird zum Punkt (y_0, x_0) auf dem Graphen von f^{-1} . Ein schönes Beispiel sind die Exponential- und Logarithmusfunktionen, die zueinander Umkehrfunktionen sind.

Das ist nicht!!! der Kehrwert!

Nächste Woche dran!



Das Verständnis der Umkehrbarkeit ist entscheidend für die Definition vieler wichtiger Funktionen (wie Logarithmus- und Arkusfunktionen) und für das Lösen von Gleichungen.