

IMA 1: Analysis. Skript Woche 4

Version: 2025-10-18



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or write to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, CA 94105, USA.

Skript generiert von Gemini 2.5 Pro, in Grün kommentiert und korrigiert von Jörn Loviscach

4 Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Nachdem wir die grundlegenden Konzepte von Funktionen sowie die speziellen Potenzfunktionen kennengelernt haben, wenden wir uns nun einer ungemein wichtigen und vielseitigen Klasse von Funktionen zu: den Polynomfunktionen. Sie bilden das Fundament für viele Bereiche der Analysis und der numerischen Mathematik. Anschließend werden wir diese Funktionen erweitern, indem wir Brüche aus ihnen bilden, was uns zu den rationalen Funktionen führt.

4.1 Polynomfunktionen: Die Bausteine der Analysis

Stellen Sie sich vor, Sie haben verschiedene Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten zur Verfügung, also $x^0 = 1, x^1 = x, x^2, x^3, \dots$. Eine *Polynomfunktion* entsteht, wenn wir diese Potenzfunktionen mit konstanten reellen Zahlen, den sogenannten *Koeffizienten*, gewichten und anschließend addieren. Eine allgemeine Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat die Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Ein solcher Ausdruck heißt Polynom.

Dabei sind die $a_k \in \mathbb{R}$ die Koeffizienten und $n \in \mathbb{N}_0$ ist eine nicht-negative ganze Zahl. Der höchste vorkommende Exponent n , dessen Koeffizient a_n ungleich Null ist, wird als *Grad* des Polynoms bezeichnet. Der zugehörige Koeffizient a_n heißt *Leitkoeffizient*. So ist beispielsweise $f(x) = -2x^3 + 5x - 1$ eine Polynomfunktion vom Grad 3 mit dem Leitkoeffizienten -2 . Konstante Funktionen wie $f(x) = 7$ sind Polynomfunktionen vom Grad 0, und lineare Funktionen wie $g(x) = 4x - 2$ sind Polynomfunktionen vom Grad 1.

Das Verhalten einer Polynomfunktion für sehr große positive oder sehr kleine negative Werte von x , also für $x \rightarrow \pm\infty$, wird ausschließlich durch den Summanden mit der höchsten Potenz, also $a_n x^n$, bestimmt. Die Terme mit niedrigeren Potenzen werden für betragsmäßig große x von diesem Leitterm dominiert und fallen nicht mehr ins Gewicht. Das globale Verhalten hängt somit nur vom Grad n (ob gerade oder ungerade) und vom Vorzeichen des Leitkoeffizienten a_n ab.

Ein zentrales Thema bei der Untersuchung von Polynomfunktionen sind ihre *Nullstellen*. Eine Nullstelle x_0 ist ein Wert aus der Definitionsmenge, für den der Funktionswert null wird, also $f(x_0) = 0$. Grafisch entsprechen die Nullstellen den Schnitt- oder Berührungspunkten des Funktionsgraphen mit der x -Achse. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt,

Kommt noch!

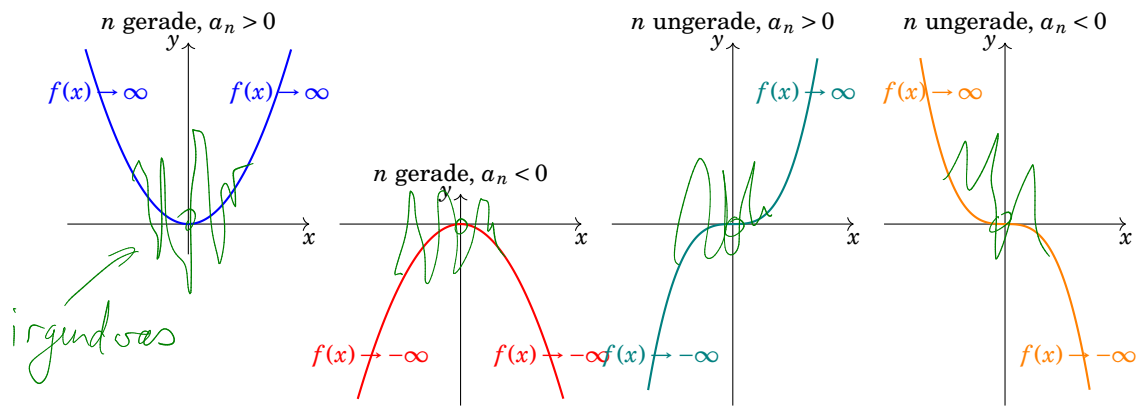


Abbildung 1: Die vier Fälle für das Globalverhalten von Polynomfunktionen.

dass eine Polynomfunktion vom Grad n genau n (komplexe) Nullstellen hat. Für unsere Betrachtung im Reellen bedeutet dies, dass es *höchstens* n reelle Nullstellen gibt.

Jede Nullstelle x_0 einer Polynomfunktion f liefert uns eine wertvolle Information über die Struktur des Polynoms. Wenn x_0 eine Nullstelle ist, dann lässt sich der Term $(x - x_0)$, ein sogenannter *Linearfaktor*, aus dem Polynom ausklammern. Das bedeutet, wir können $f(x)$ schreiben als $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$, wobei $g(x)$ wieder ein Polynom ist, dessen Grad um eins kleiner ist als der von f . Kommt ein Linearfaktor $(x - x_0)$ in der Zerlegung von $f(x)$ genau k -mal vor, so sprechen wir von einer Nullstelle k -facher *Vielfachheit*. Die Vielfachheit einer Nullstelle bestimmt das Verhalten des Graphen an dieser Stelle: Bei einer *einfachen* Nullstelle (Vielfachheit 1) schneidet der Graph die x -Achse. Bei einer Nullstelle mit *gerader* Vielfachheit (z.B. 2, 4, ...) berührt der Graph die x -Achse nur, ohne sie zu überqueren. Bei einer Nullstelle mit *ungerader* Vielfachheit größer als 1 (z.B. 3, 5, ...) durchdringt der Graph die x -Achse in Form eines Sattelpunktes.

Begrundung:
Rest bei Polynomdivision $f(x) = (x-x_0)^k \cdot g(x)$ muss 0 sein, sonst wäre $f(x) = (x-x_0)^k \cdot g(x) + k \cdot (x-x_0)^{k-1} \cdot g(x) + \dots$ also x_0 keine Nullstelle. W, der Graph

Um die Linearfaktoren zu finden, wenn eine Nullstelle x_0 bekannt ist, bedient man sich der *Polynomdivision*. Dieses Verfahren ist eine direkte Verallgemeinerung der schriftlichen Division von Zahlen. Wir dividieren das Polynom $f(x)$ durch den Linearfaktor $(x - x_0)$. Wenn x_0 tatsächlich eine Nullstelle ist, geht diese Division ohne Rest auf. Das Ergebnis ist das Polynom $g(x)$ von oben. Betrachten wir zum Beispiel $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Durch Probieren finden wir die Nullstelle $x_0 = 1$. Nun führen wir die Polynomdivision $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1)$ durch:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\
 \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 -x^2 - 5x \\
 \underline{-(-x^2 + x)} \\
 -6x + 6 \\
 \underline{-(-6x + 6)} \\
 \text{Rest } 0
 \end{array}$$

sauber untereinander!

Wir erhalten also $f(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$. Die restlichen Nullstellen von f sind nun die Nullstellen des quadratischen Terms, die wir leicht mit der p-q-Formel als $x_2 = 3$ und $x_3 = -2$ bestimmen können. Damit haben wir die vollständige Zerlegung in Linearfaktoren: $f(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$.

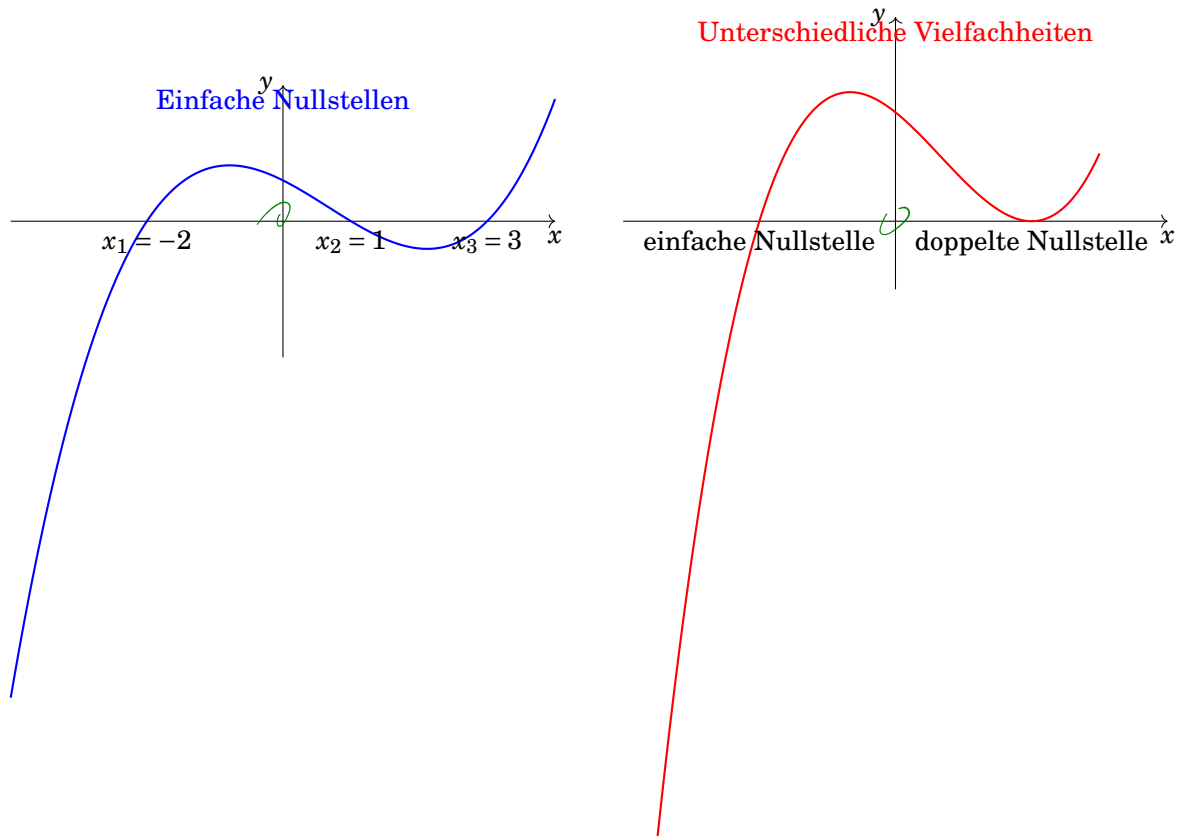
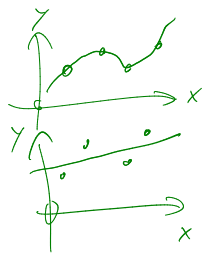


Abbildung 2: Verhalten des Graphen an Nullstellen unterschiedlicher Vielfachheit.

Zum *Skizzieren* des Graphen einer Polynomfunktion kombinieren wir diese Informationen: Wir bestimmen das Globalverhalten aus dem Leitterm, berechnen den y-Achsenabschnitt $f(0) = a_0$ und finden alle reellen Nullstellen sowie deren Vielfachheiten. Mit diesen „Ankerpunkten“ und dem Wissen über das Verhalten ~~an den Rändern~~ für $x \rightarrow \pm\infty$ können wir eine gute Skizze des Graphen anfertigen.

Eine wichtige *Anwendungsidee* für Polynomfunktionen liegt in der *Interpolation* und *Regression*. In den Ingenieur- und Naturwissenschaften erhält man oft Messdaten in Form von Punkten. Bei der Interpolation sucht man eine Polynomfunktion, die exakt durch eine gegebene Menge von Punkten verläuft. Dies erlaubt es, plausible Zwischenwerte zu schätzen. Bei der Regression hingegen, etwa bei fehlerbehafteten Messdaten, sucht man nicht eine Funktion, die alle Punkte trifft, sondern eine, die sich den Daten „bestmöglich annähert“, zum Beispiel im Sinne der kleinsten quadratischen Abweichung. Polynome sind hierfür besonders gut geeignet, da ihre Flexibilität mit dem Grad zunimmt.



4.2 Rationale Funktionen: Die Welt der Brüche

Wenn wir zwei Polynomfunktionen $P(x)$ und $Q(x)$ nehmen und ihren Quotienten bilden, erhalten wir eine *rationale Funktion* $f(x)$:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0}.$$

Das Verhalten dieser Funktionen ist deutlich komplexer als das von Polynomen. Die entscheidende Neuerung ist die Definitionsmenge. Während Polynome für alle reellen

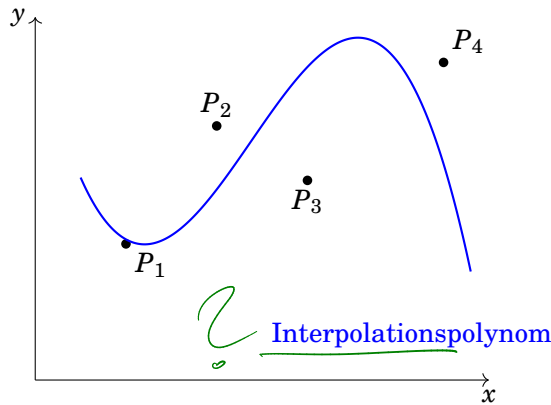


Abbildung 3: Ein Polynom 3. Grades, das vier gegebene Datenpunkte exakt interpoliert.

Zahlen definiert sind, ist eine rationale Funktion nur dort definiert, wo ihr Nennerpolynom $Q(x)$ nicht null ist. Die Definitionsmenge ist also $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Die Nullstellen des Nenners sind die „Problemstellen“, die wir genauer klassifizieren müssen.

Eine *Nullstelle* einer rationalen Funktion liegt dort vor, wo das Zählerpolynom $P(x)$ null ist, das Nennerpolynom $Q(x)$ aber gleichzeitig nicht null ist. An diesen Stellen schneidet oder berührt der Graph die x -Achse, genau wie bei den Polynomfunktionen.

Spannender wird es bei den Nullstellen des Nenners. Sei x_0 eine Nullstelle von $Q(x)$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. **Polstellen:** Wenn x_0 eine Nullstelle des Nenners $Q(x)$ ist, aber keine Nullstelle des Zählers $P(x)$, dann haben wir an der Stelle x_0 eine *Polstelle* oder einen *Pol*. Nähert sich x dem Wert x_0 , so wird der Nenner betragsmäßig sehr klein, während der Zähler einen festen, von null verschiedenen Wert annimmt. Der gesamte Bruch „explodiert“ daher gegen $+\infty$ oder $-\infty$. Grafisch äußert sich dies in einer *vertikalen Asymptote* bei $x = x_0$, einer senkrechten Linie, der sich der Graph beliebig annähert, sie aber niemals erreicht. Die Vielfachheit der Nennernullstelle entscheidet, ob die Funktion auf beiden Seiten der Asymptote in die gleiche Richtung strebt (gerade Vielfachheit, kein Vorzeichenwechsel) oder in entgegengesetzte Richtungen (ungerade Vielfachheit, mit Vorzeichenwechsel).

2. **Stetig hebbare Definitionslücken:** Wenn x_0 eine Nullstelle des Nenners $Q(x)$ und gleichzeitig auch eine Nullstelle des Zählers $P(x)$ ist, liegt eine *stetig hebbare Definitionslücke* vor. In diesem Fall können wir sowohl im Zähler als auch im Nenner den Linearfaktor $(x - x_0)$ ausklammern und anschließend kürzen. Die Funktion $f(x)$ verhält sich in der Umgebung von x_0 dann wie die gekürzte Funktion. An der Stelle x_0 selbst ist die ursprüngliche Funktion zwar nicht definiert, aber sie besitzt einen Grenzwert. Grafisch entspricht dies einem „Loch“ im Graphen.

Neben dem Verhalten an den Definitionslücken ist auch das Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ von großem Interesse. Dies wird durch das Verhältnis der Grade von Zähler- und Nennerpolynom, sei $n = \text{grad}(P)$ und $m = \text{grad}(Q)$, bestimmt.

- **Fall 1: $n < m$ (Zählergrad kleiner Nennergrad):** Der Nenner wächst schneller als der Zähler. Der Bruch geht daher für $x \rightarrow \pm\infty$ gegen Null. Die x -Achse ($y = 0$) ist eine *horizontale Asymptote*.

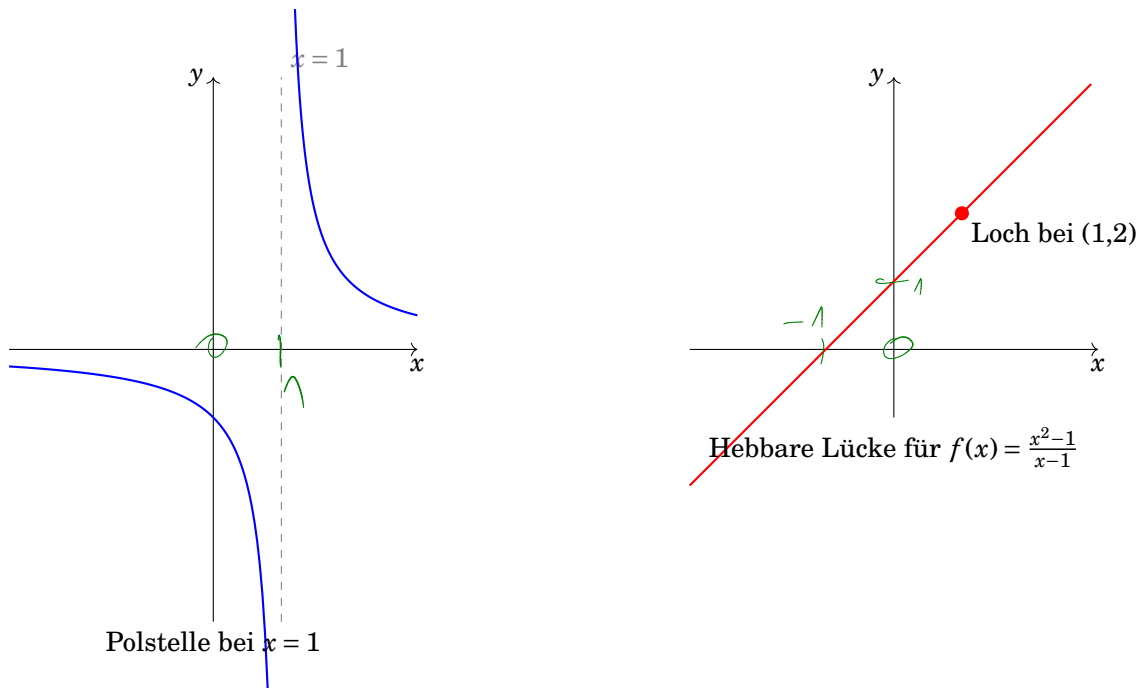


Abbildung 4: Links eine Polstelle mit vertikaler Asymptote. Rechts eine stetig hebbare Definitionslücke.

- **Fall 2: $n = m$ (Zählergrad gleich Nennergrad):** Zähler und Nenner wachsen gleich schnell. Für große x dominieren jeweils die Leitterme $a_n x^n$ und $b_m x^m$. Der Bruch nähert sich dem konstanten Wert a_n/b_m . Die Gerade $y = a_n/b_m$ ist eine *horizontale Asymptote*.
- **Fall 3: $n > m$ (Zählergrad größer Nennergrad):** Der Zähler wächst schneller als der Nenner. Der Funktionswert geht für $x \rightarrow \pm\infty$ gegen $\pm\infty$. Es gibt keine horizontale Asymptote. Ist speziell $n = m + 1$, so erhalten wir durch Polynomdivision $f(x) = P(x)/Q(x) = s(x) + r(x)/Q(x)$, wobei $s(x)$ eine lineare Funktion (Form $ax + b$) und $r(x)$ der Rest ist. Da der Restterm für große x gegen Null geht, nähert sich der Graph von $f(x)$ der Geraden $y = s(x)$ an. Diese Gerade nennt man *schiefe Asymptote*.

der Polynomdivision $r(x)/Q(x)$

Das *Skizzieren* einer rationalen Funktion ist ein mehrstufiger Prozess: Man bestimmt die Definitionsmenge, findet Nullstellen, klassifiziert die Definitionslücken (Pole oder hebbare Lücken) und bestimmt das asymptotische Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$. Mit diesen Strukturelementen lässt sich der Graph qualitativ korrekt zeichnen.

Eine wichtige *Anwendungsidee* für rationale Funktionen findet sich in der *Beschreibung von Systemen mit Rückkopplung*, wie sie in der Regelungstechnik, Elektronik oder Biologie vorkommen. Stellen Sie sich ein einfaches System vor, das ein Eingangssignal mit einem Faktor G (Verstärkung) verstärkt. Wenn ein Teil des Ausgangssignals wieder auf den Eingang zurückgeführt wird (Rückkopplung), kann die Gesamtverstärkung des Systems oft durch eine rationale Funktion beschrieben werden, z.B. in der Form $f(G) = \frac{G}{1+kG}$. Hier kann der Nenner null werden, was im physikalischen System zu Instabilitäten oder Resonanzphänomenen führt – die Polstelle der mathematischen Beschreibung hat eine direkte physikalische Bedeutung.

