

# IMA 1: Analysis. Skript Woche 5

Version: 2025-10-18



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or write to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, CA 94105, USA.

Skript generiert von Gemini 2.5 Pro, in Grün kommentiert und korrigiert von Jörn Loviscach

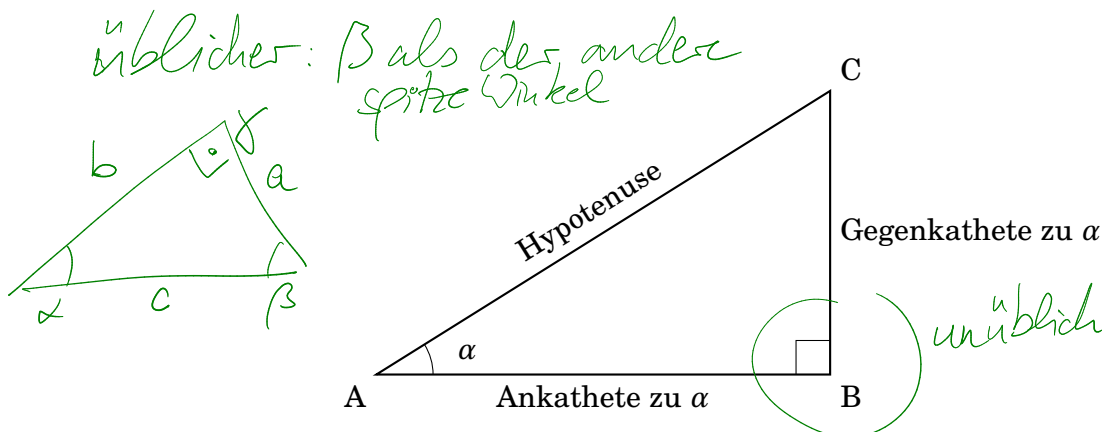
## 5 Trigonometrische Funktionen

Nachdem wir uns mit Polynom- und rationalen Funktionen vertraut gemacht haben, wenden wir uns einer völlig neuen und fundamentalen Klasse von Funktionen zu: den trigonometrischen Funktionen. Diese Funktionen, oft auch Winkelfunktionen genannt, sind unverzichtbar, um periodische Vorgänge wie Schwingungen, Wellen oder Kreisbewegungen mathematisch zu beschreiben. Ihr Ursprung liegt jedoch in der Geometrie, genauer gesagt in der Untersuchung von rechtwinkligen Dreiecken.

### 5.1 Definitionen am rechtwinkligen Dreieck

Stellen wir uns ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck vor. Es besitzt einen rechten Winkel ( $90^\circ$ ) und zwei weitere, spitze Winkel. Die Summe aller Winkel in einem Dreieck beträgt stets  $180^\circ$ , also müssen die beiden spitzen Winkel zusammen ebenfalls  $90^\circ$  ergeben. Die Seiten des Dreiecks haben spezielle Namen: Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, ist immer die längste Seite und wird als **Hypotenuse** bezeichnet. Die beiden anderen Seiten, die den rechten Winkel bilden, werden als **Katheten** bezeichnet.

Der entscheidende Gedanke der Trigonometrie ist nun, die Längenverhältnisse der Seiten in eine feste Beziehung zu den Winkeln des Dreiecks zu setzen. Dazu betrachten wir einen der beiden spitzen Winkel, den wir mit dem griechischen Buchstaben  $\alpha$  (Alpha) bezeichnen. Aus der Perspektive dieses Winkels  $\alpha$  können wir die beiden Katheten genauer benennen. Die Kathete, die dem Winkel  $\alpha$  direkt gegenüberliegt, nennen wir die **Gegenkathete** von  $\alpha$ . Die Kathete, die am Winkel  $\alpha$  anliegt (und nicht die Hypotenuse ist), wird als **Ankathete** von  $\alpha$  bezeichnet.



---

Für jeden festen Winkel  $\alpha$  in einem rechtwinkligen Dreieck sind die Verhältnisse der Längen von Gegenkathete, Ankathete und Hypotenuse zueinander immer gleich, unabhängig von der absoluten Größe des Dreiecks. Dies ist eine direkte Folge der Strahlensätze bzw. der geometrischen Ähnlichkeit. Diese konstanten Verhältnisse erhalten eigene Namen und definieren die drei grundlegenden trigonometrischen Funktionen:

Der **Sinus** des Winkels  $\alpha$ , geschrieben als  $\sin(\alpha)$ , ist das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Länge der Hypotenuse.

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Der **Kosinus** des Winkels  $\alpha$ , geschrieben als  $\cos(\alpha)$ , ist das Verhältnis der Länge der Ankathete zur Länge der Hypotenuse.

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Der **Tangens** des Winkels  $\alpha$ , geschrieben als  $\tan(\alpha)$ , ist das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Länge der Ankathete.

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Es fällt auf, dass der Tangens auch als das Verhältnis von Sinus und Kosinus ausgedrückt werden kann, da sich die Hypotenuse herauskürzt:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\text{Gegenkathete}/\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}/\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \tan(\alpha)$$

## 5.2 Der trigonometrische Pythagoras

Eine der fundamentalsten Identitäten der Trigonometrie ergibt sich direkt aus dem Satz des Pythagoras. In unserem rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$(\text{Ankathete})^2 + (\text{Gegenkathete})^2 = (\text{Hypotenuse})^2$$

Wenn wir nun die Definitionen von Sinus und Kosinus verwenden, können wir die Längen der Katheten durch die Hypotenuse und den Winkel ausdrücken:

$$\text{Ankathete} = \cos(\alpha) \cdot \text{Hypotenuse} \quad \text{und} \quad \text{Gegenkathete} = \sin(\alpha) \cdot \text{Hypotenuse}$$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke in den Satz des Pythagoras ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} (\cos(\alpha) \cdot \text{Hypotenuse})^2 + (\sin(\alpha) \cdot \text{Hypotenuse})^2 &= (\text{Hypotenuse})^2 \\ \cos^2(\alpha) \cdot (\text{Hypotenuse})^2 + \sin^2(\alpha) \cdot (\text{Hypotenuse})^2 &= (\text{Hypotenuse})^2 \end{aligned}$$

Nun können wir auf beiden Seiten der Gleichung durch  $(\text{Hypotenuse})^2$  dividieren, da die Länge der Hypotenuse sicherlich nicht null ist. Das Ergebnis ist eine bemerkenswert einfache und universell gültige Beziehung zwischen Sinus und Kosinus, die oft als **trigonometrischer Pythagoras** bezeichnet wird:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

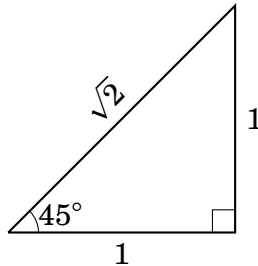
Diese Gleichung gilt für jeden beliebigen Winkel  $\alpha$ . Sie bedeutet, dass, wenn wir den Wert des Sinus eines Winkels kennen, wir den Betrag des Kosinus (und umgekehrt) sofort berechnen können.

*Na ja,  
kann  
passieren.*

### 5.3 Werte für spezielle Winkel

Für einige besondere Winkel lassen sich die Werte der trigonometrischen Funktionen exakt aus einfachen geometrischen Überlegungen herleiten.

Betrachten wir zunächst ein **gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck**. Dies ist nichts anderes als ein halbes Quadrat, das entlang seiner Diagonale geteilt wurde. Die beiden spitzen Winkel müssen gleich groß sein und sich zu  $90^\circ$  ergänzen, also beträgt jeder Winkel  $45^\circ$ . Wenn wir die Länge der beiden Katheten auf 1 normieren, so ergibt sich die Länge der Hypotenuse aus dem Satz des Pythagoras zu  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ .



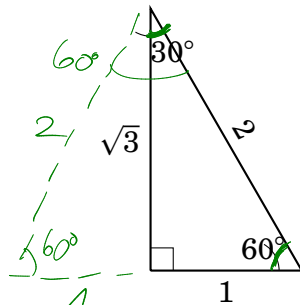
Daraus können wir die Werte für  $45^\circ$  direkt ablesen:

$$\sin(45^\circ) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(45^\circ) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{1}{1} = 1$$

Für die Winkel  $30^\circ$  und  $60^\circ$  betrachten wir ein **gleichseitiges Dreieck** mit der Seitenlänge 2. Alle Winkel in einem solchen Dreieck betragen  $60^\circ$ . Wenn wir dieses Dreieck in der Mitte halbieren, erhalten wir ein rechtwinkliges Dreieck mit den Winkeln  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$ . Die Hypotenuse hat die Länge 2, die kürzere Kathete (die halbe Grundseite) hat die Länge 1, und die längere Kathete (die Höhe) hat nach Pythagoras die Länge  $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ .



Aus dieser Figur lesen wir die Werte für  $60^\circ$  ab:

$$\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}, \quad \tan(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Und für den  $30^\circ$ -Winkel (hierfür müssen wir die Rollen von An- und Gegenkathete vertauschen):

$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}, \quad \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Die Grenzfälle  $0^\circ$  und  $90^\circ$  kann man sich als degenerierte Dreiecke vorstellen. Bei  $0^\circ$  ist die Gegenkathete 0 und die Ankathete gleich der Hypotenuse, woraus  $\sin(0^\circ) = 0$  und  $\cos(0^\circ) = 1$  folgt. Bei  $90^\circ$  ist die Ankathete 0 und die Gegenkathete gleich der Hypotenuse, also  $\sin(90^\circ) = 1$  und  $\cos(90^\circ) = 0$ . Der Tangens von  $90^\circ$  ist nicht definiert, da dies eine Division durch die Ankathete der Länge Null erfordern würde.

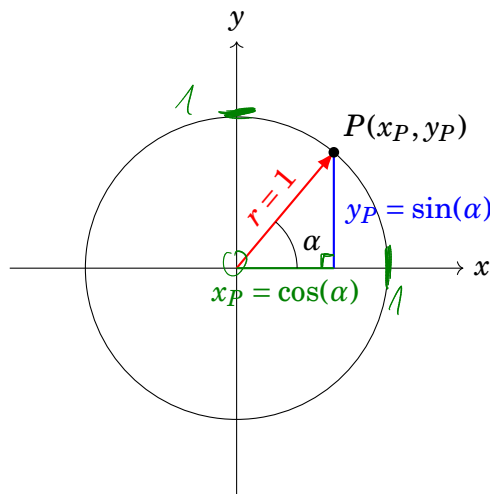
*Tabelle machen!*  

sin	0°	30°	45°	60°	90°
cos					
tan					

## 5.4 Verallgemeinerung am Einheitskreis

Die Definition am rechtwinkligen Dreieck ist auf Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  beschränkt. Um das Konzept auf beliebige Winkel zu erweitern, nutzen wir den **Einheitskreis**. Dies ist ein Kreis mit dem Radius  $r = 1$ , dessen Mittelpunkt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems liegt.

Ein beliebiger Punkt  $P(x, y)$  auf diesem Kreis kann durch einen Winkel  $\alpha$  beschrieben werden. Dieser Winkel wird von der positiven x-Achse aus gegen den Uhrzeigersinn bis zum Radiusstrahl gemessen, der zum Punkt  $P$  führt. Wenn wir vom Punkt  $P$  ein Lot auf die x-Achse fallen, entsteht ein rechtwinkliges Dreieck. Die Hypotenuse dieses Dreiecks ist der Radius des Kreises und hat die Länge 1. Die Ankathete hat die Länge des x-Wertes des Punktes  $P$ , und die Gegenkathete hat die Länge des y-Wertes.



Unsere Definitionen für Sinus und Kosinus lauten:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{y_P}{1} = y_P$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{x_P}{1} = x_P$$

*Nun mit Vorzeichen!*

Diese Beobachtung ist von zentraler Bedeutung: **Die x-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis ist der Kosinus des zugehörigen Winkels, und die y-Koordinate ist der Sinus des Winkels.** Der Tangens ist entsprechend der Quotient  $\tan(\alpha) = y_P/x_P$ , was der Steigung des Radiusstrahls entspricht.

Diese neue Definition ist weitaus mächtiger. Sie ermöglicht es uns, Sinus und Kosinus für jeden beliebigen Winkel zu definieren, auch für Winkel größer als  $90^\circ$  oder negative Winkel (die im Uhrzeigersinn gemessen werden). Die Vorzeichen der x- und y-Koordinaten in den vier Quadranten des Koordinatensystems liefern automatisch die korrekten Vorzeichen für Kosinus und Sinus.

*Kursiv*

## 5.5 Vom Gradmaß zum Bogenmaß

In der höheren Mathematik und in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften wird für Winkel nur selten das Gradmaß ( $^\circ$ ) verwendet. Stattdessen nutzt man das **Bogenmaß**, dessen Einheit das **Radian** (rad) ist. Das Bogenmaß ist ein natürlicheres Maß für Winkel, da es direkt mit der Geometrie des Kreises verknüpft ist.

*und beim Programmieren*

Ein Winkel von 1 Radian ist definiert als der Winkel, bei dem die Länge des zugehörigen Kreisbogens genau der Länge des Kreisradius entspricht. Der gesamte Umfang eines Kreises mit Radius  $r$  beträgt  $U = 2\pi r$ . Im Einheitskreis mit  $r = 1$  ist der Umfang also genau  $2\pi$ . Einer vollen Umdrehung von  $360^\circ$  entspricht daher ein Bogenmaß von  $2\pi$ . Aus dieser fundamentalen Beziehung können wir die Umrechnungsfaktoren ableiten:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \iff 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

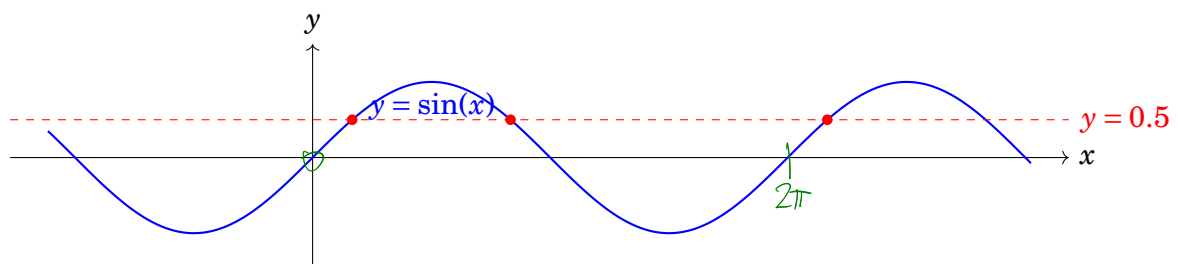
Um von Grad in Bogenmaß umzurechnen, multipliziert man den Gradwert mit  $\frac{\pi}{180^\circ}$ . Für die umgekehrte Richtung multipliziert man den Bogenmaßwert mit  $\frac{180^\circ}{\pi}$ . Wichtige Werte sind beispielsweise:  $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ ,  $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ ,  $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ ,  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ ,  $180^\circ = \pi$ ,  $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ ,  $360^\circ = 2\pi$ . Fortan werden wir, wenn nicht anders angegeben, Winkel immer im Bogenmaß betrachten.

*Also 1 rad  $\approx$   $60^\circ$ .*

## 5.6 Das Problem der Umkehrbarkeit

Wir wissen, dass eine Funktion  $f$  nur dann eine Umkehrfunktion  $f^{-1}$  besitzt, wenn sie bijektiv ist, also jedem Element der Zielmenge genau ein Element der Definitionsmenge zugeordnet wird. Eine wichtige Bedingung dafür ist die Injektivität: Verschiedene Eingabewerte müssen zu verschiedenen Ausgabewerten führen.

Betrachten wir die Sinusfunktion,  $f(x) = \sin(x)$ . Diese Funktion ist periodisch mit der Periode  $2\pi$ . Das bedeutet,  $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$  für jede ganze Zahl  $k$ . Zum Beispiel ist  $\sin(0) = 0$ , aber auch  $\sin(\pi) = 0$ ,  $\sin(2\pi) = 0$  und so weiter. Unendlich viele verschiedene x-Werte liefern den gleichen Funktionswert. Die Sinusfunktion ist also nicht injektiv und somit global nicht umkehrbar. Das Gleiche gilt für den Kosinus (Periode  $2\pi$ ) und den Tangens (Periode  $\pi$ ).



Die Abbildung zeigt, dass eine horizontale Gerade (konstanter y-Wert) den Graphen der Sinusfunktion unendlich oft schneidet.

*Kursiv*

## 6 Die Arkusfunktionen als Umkehrfunktionen

Um dennoch eine Umkehrung zu ermöglichen, bedient man sich eines Standardtricks: Man schränkt den Definitionsbereich der ursprünglichen Funktion so ein, dass sie auf diesem eingeschränkten Bereich injektiv wird. Man wählt Konventionen für diese Bereiche, die als **Hauptwertebereiche** bezeichnet werden.

Für die **Sinusfunktion** wählt man das Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . In diesem Bereich durchläuft der Sinus alle Werte von  $-1$  bis  $1$  genau einmal. Die Umkehrfunktion des so eingeschränkten Sinus heißt **Arkussinus**, geschrieben als  $\arcsin(y)$ . Es gilt also:

Das plotten!

$$\arcsin(y) = x \iff \sin(x) = y \text{ und } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Die Definitionsmenge des Arkussinus ist  $[-1, 1]$ , seine Wertemenge ist  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

Für die **Kosinusfunktion** wählt man als Hauptwertebereich das Intervall  $[0, \pi]$ . Die Umkehrfunktion heißt **Arkuskosinus**,  $\arccos(y)$ .

$$\arccos(y) = x \iff \cos(x) = y \text{ und } x \in [0, \pi]$$

Die Definitionsmenge ist ebenfalls  $[-1, 1]$ , die Wertemenge ist  $[0, \pi]$ .

Für die **Tangensfunktion** schränkt man den Definitionsbereich auf das offene Intervall  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  ein. Die Umkehrfunktion ist der **Arkustangens**,  $\arctan(y)$ .

$$\arctan(y) = x \iff \tan(x) = y \text{ und } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

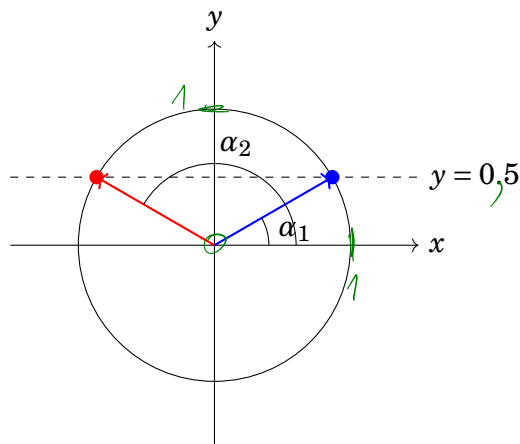
Die Definitionsmenge des Arkustangens ist ganz  $\mathbb{R}$ , die Wertemenge ist  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

### 6.1 Die Mehrdeutigkeit beim Lösen von Gleichungen

Die Arkusfunktionen sind extrem nützlich, aber man muss ihre Einschränkung stets im Hinterkopf behalten. Wenn wir eine Gleichung wie  $\sin(\alpha) = 0,5$  lösen wollen, liefert uns ein Taschenrechner mittels der Arkussinus-Funktion nur eine einzige Lösung:

$$\alpha_1 = \arcsin(0,5) = \frac{\pi}{6} \text{ (oder } 30^\circ)$$

Dies ist der sogenannte **Hauptwert**, die einzige Lösung im Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Wie wir aber am Graphen und am Einheitskreis sehen, gibt es unendlich viele weitere Lösungen.



Im Einheitskreis sehen wir, dass der y-Wert 0,5 nicht nur beim Winkel  $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$  erreicht wird, sondern auch bei einem zweiten Winkel  $\alpha_2$  im zweiten Quadranten. Aufgrund der Symmetrie der Sinusfunktion zur y-Achse gilt  $\alpha_2 = \pi - \alpha_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ . Um nun *alle* Lösungen zu finden, müssen wir die  $2\pi$ -Periodizität berücksichtigen. Jedes Mal, wenn wir einen der beiden Basiswinkel um ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  verschieben, erhalten wir eine weitere gültige Lösung. Die vollständige Lösungsmenge lautet daher:

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Beim Lösen trigonometrischer Gleichungen ist es also unerlässlich, nach der Anwendung der Arkusfunktion die Symmetrieeigenschaften und die Periodizität zu berücksichtigen, um alle Lösungen zu finden.

## 6.2 Eine nützliche Funktion für die Praxis: atan2

Ein häufiges Problem in der Praxis, z.B. in der Robotik oder Computergrafik, ist die Bestimmung des Winkels eines Punktes  $(x, y)$  bezüglich des Ursprungs. Man könnte versucht sein, dies über den Tangens zu tun:  $\tan(\alpha) = y/x$ , also  $\alpha = \arctan(y/x)$ . Hierbei geht jedoch entscheidende Information verloren. Betrachten wir den Punkt  $P_1(1, 1)$  und den Punkt  $P_2(-1, -1)$ . Für beide Punkte ist der Quotient  $y/x = 1$ . Die Arkustangensfunktion liefert in beiden Fällen  $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$  ( $45^\circ$ ). Dies ist korrekt für  $P_1$  im ersten Quadranten, aber falsch für  $P_2$ , der im dritten Quadranten liegt und den Winkel  $\frac{5\pi}{4}$  (oder  $-\frac{3\pi}{4}$ ) haben sollte. Der Arkustangens kann nicht zwischen diesen beiden Fällen unterscheiden, da er nur den Quotienten kennt, nicht aber die Vorzeichen von  $x$  und  $y$  separat.

Aus diesem Grund wurde in vielen Programmiersprachen (wie Python, C++, Java) und mathematischen Bibliotheken eine Zwei-Argumente-Funktion des Arkustangens implementiert, die oft  $\text{atan2}(y, x)$  genannt wird. Diese Funktion nimmt Zähler und Nenner des Bruchs als separate Argumente entgegen. Dadurch kennt sie die Vorzeichen von  $x$  und  $y$  und kann den Winkel eindeutig dem richtigen Quadranten zuordnen. ~~Der Wertebereich~~ von  $\text{atan2}$  ist üblicherweise  $(-\pi, \pi]$ , womit der gesamte Kreis abgedeckt wird. *Reihenfolge!* *Die Bildmenge*

Für unsere Beispiele würde gelten:  $\text{atan2}(1, 1)$  liefert  $\frac{\pi}{4}$ .  $\text{atan2}(1, -1)$  liefert  $\frac{3\pi}{4}$  (zweiter Quadrant).  $\text{atan2}(-1, -1)$  liefert  $-\frac{3\pi}{4}$  (dritter Quadrant).  $\text{atan2}(-1, 1)$  liefert  $-\frac{\pi}{4}$  (vierter Quadrant).

Die Funktion  $\text{atan2}$  ist das Standardwerkzeug für die Umrechnung von kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  in Polarkoordinaten  $(r, \phi)$ , da sie den Winkel  $\phi$  robust und eindeutig berechnet.

*In Tabellenkalkulationen ist es  $\text{atan2}(x, y)$ .*

