IMA 1: Analysis. Skript Woche 6

Version: 2025-10-22

Skript generiert von Gemini 2.5 Pro, in Grün kommentiert und korrigiert von Jörn Loviscach

6 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Gelaber

Nachdem wir uns ausführlich mit Potenzfunktionen der Form $f(x) = c \cdot x^n$ beschäftigt haben, bei denen die Variable x in der Basis steht und der Exponent n eine feste Zahl ist, betreten wir nun eine neue, faszinierende Welt der Funktionen. Wir stellen uns die Frage: Was passiert, wenn wir die Rollen von Basis und Exponent vertauschen? Was, wenn die Variable selbst in den Exponenten wandert? Die Antwort führt uns zu den Exponentialfunktionen, die Prozesse beschreiben, deren Veränderung ~~von ihrem~~ ein Vielfaches ihres aktuellen Zustand~~s abhängt~~ ist – das Wesen von Wachstum und Zerfall in der Natur.

6.1 Definition und Abgrenzung der Exponentialfunktion

Eine **Exponentialfunktion** zur Basis a ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit der Funktionsvorschrift

$$f(x) = a^x$$

Einige Leute erlauben auch Faktoren davor wie $7 \cdot 3^x$.

wobei die Basis a eine positive reelle Zahl ist, die ungleich 1 ist ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$). Die Variable x, der sogenannte Exponent, durchläuft alle reellen Zahlen.

Der entscheidende Unterschied zu den Ihnen bekannten Potenzfunktionen liegt in der Position der Variablen. Lassen Sie uns diesen Unterschied an Beispielen aus der realen Welt verdeutlichen, um ein tiefes intuitives Verständnis zu entwickeln.

Potenzfunktionen beschreiben Zusammenhänge, bei denen eine Größe von einer anderen mit einer festen „Potenz“ abhängt. Denken Sie an den Flächeninhalt eines Kreises, $A(r) = \pi r^2$. Wenn Sie den Radius r verdoppeln, vervierfacht sich die Fläche. Die „Kraft“ der Veränderung ist hier quadratisch, also durch den festen Exponenten 2 bestimmt. Ähnlich verhält es sich mit dem Volumen einer Kugel, $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, das mit der dritten Potenz des Radius wächst. Auch physikalische Gesetze folgen oft diesem Muster: Die kinetische Energie eines Objekts, $E_{\text{kin}}(v) = \frac{1}{2}mv^2$, hängt quadratisch von seiner Geschwindigkeit ab. Die Leistung, die eine Windkraftanlage dem Wind entnehmen kann, wächst sogar mit der dritten Potenz der Windgeschwindigkeit ($P \propto v^3$). Die Intensität des Lichts einer Lampe nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab ($I \propto 1/r^2 = r^{-2}$). In all diesen Fällen ist die Variable die Basis, und der Exponent ist ~~eine~~ unveränderlich~~e Konstante~~.

Exponentialfunktionen hingegen modellieren Prozesse, bei denen die *Änderungsrate* proportional zum bereits vorhandenen Bestand ist. Das klassische Beispiel ist der Zinseszins: Wenn Sie ein Kapital auf einer Bank anlegen (und wir annehmen, die Bank geht nicht pleite), wird es jedes Jahr nicht um einen festen Betrag, sondern um einen festen Prozentsatz des *aktuellen* Kapitals verzinst. Das Kapital wächst also um einen konstanten *Faktor*. Wenn der jährliche Zinssatz 5% beträgt, wird Ihr Kapital jedes Jahr mit dem Faktor 1,05 multipliziert. Nach t Jahren haben Sie das $K_0 \cdot (1,05)^t$~~-fache Ihres~~ Kapital, ausgehend vom Anfangskapital~~s~~ K_0. Die Zeit t als Zahl von Jahren steht hier im Exponenten.

Weitere Beispiele für exponentielle Prozesse sind allgegenwärtig. Das ungebremste Wachstum einer Bakterienkultur in einer Petrischale folgt diesem Prinzip: Jede Bakterie teilt sich in einem bestimmten Zeitintervall, sodass sich die Gesamtpopulation in dieser Zeit verdoppelt. Die Anzahl der Bakterien $N(t)$ zum Zeitpunkt t lässt sich als $N(t) = N_0 \cdot 2^{t/T_d}$ beschreiben, wobei T_d die Verdopplungszeit ist. Der radioaktive Zerfall ist das genaue Gegenteil: In jeder Zeiteinheit zerfällt ein fester *Bruchteil* der noch vorhandenen Atomkerne. Die Anzahl der verbleibenden Kerne nimmt exponentiell ab. Ähnlich entlädt sich ein Kondensator über einen Widerstand; die Spannung am Kondensator fällt exponentiell auf null ab.

Der visuelle Unterschied im Wachstumsverhalten ist dramatisch. Während eine Potenzfunktion wie x^2 stetig schneller wächst, „explodiert" eine Exponentialfunktion wie 2^x für große x förmlich und überholt jede Potenzfunktion bei weitem, siehe Abb. 1.

6.2 Rechenregeln und Monotonie

Aus den bekannten Potenzgesetzen ergeben sich direkt die Rechenregeln für Exponentialfunktionen. Für eine Basis $a > 0$ und reelle Exponenten x, y gilt:

Das Produkt von zwei Exponentialfunktionen mit gleicher Basis ergibt sich durch die Addition der Exponenten:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Die Division von zwei Exponentialfunktionen mit gleicher Basis führt zur Subtraktion der Exponenten:

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

Das Potenzieren einer Exponentialfunktion wird durch die Multiplikation der Exponenten vereinfacht:

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Ein Produkt in der Basis kann auf die einzelnen Faktoren verteilt werden, solange der Exponent gleich bleibt:

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

Diese Regeln sind die fundamentalen Werkzeuge im Umgang mit exponentiellen Ausdrücken.

Eine entscheidende Eigenschaft der Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ ist ihre Monotonie. Wir haben die Basen $a = 0$ und $a = 1$ sinnvollerweise ausgeschlossen, da $f(x) = 1^x = 1$ eine konstante und damit nicht besonders interessante Funktion ist und $a = 0$ für negative Exponenten nicht definiert ist. Für alle anderen positiven Basen ergibt sich ein klares Bild:

Gemeint ist nicht die folgende Abbildung, sondern der Text danach.

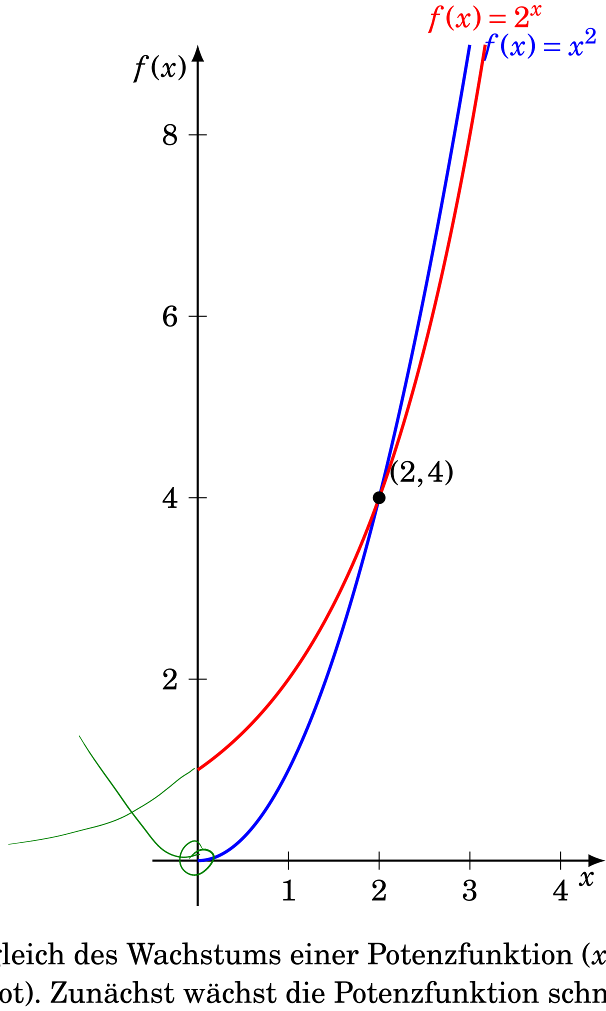

Abbildung 1: Vergleich des Wachstums einer Potenzfunktion (x^2, blau) mit einer Exponentialfunktion (2^x, rot). Zunächst wächst die Potenzfunktion schneller, doch die Exponentialfunktion überholt sie und wächst danach ungleich stärker an.

Ist die Basis $a > 1$, so ist die Funktion streng monoton wachsend. Ein größerer Wert für x führt immer zu einem größeren Funktionswert. Ist die Basis $0 < a < 1$, so ist die Funktion streng monoton fallend. Ein größerer Wert für x führt immer zu einem kleineren Funktionswert.

Da die Funktion für alle erlaubten Basen streng monoton ist, wissen wir aus den Grundlagen der Funktionenlehre, dass sie umkehrbar sein muss. Jede Exponentialfunktion besitzt also eine eindeutige Umkehrfunktion. Diese Umkehrfunktionen sind so wichtig, dass sie einen eigenen Namen erhalten haben: die Logarithmusfunktionen.

6.3 Der Logarithmus – Die Umkehrung des Exponierens

Die Exponentialfunktion $y = a^x$ beantwortet die Frage: „Welches Ergebnis y erhalte ich, wenn ich a mit x potenziere?“. Ihre Umkehrfunktion muss die genau umgekehrte Frage beantworten: „Mit welcher Zahl x muss ich die Basis a potenzieren, um das Ergebnis y zu erhalten?“. Diese Zahl x nennen wir den **Logarithmus** von y zur Basis a.

Stellen Sie sich die konkrete Frage: „Welche Potenz von 10 ist gleich 1000?“ Sie wissen, dass $10^3 = 1000$ ist. Die Antwort lautet also 3. In der Sprache der Mathematik schreiben wir dies als:

$$\log_{10}(1000) = 3$$

Man liest dies als „der Logarithmus von 1000 zur Basis 10 ist 3“.

Formal definieren wir die **Logarithmusfunktion** als die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Die folgende Äquivalenz ist der Schlüssel zum gesamten Verständnis:

$$y = a^x \iff x = \log_a(y)$$

Die Logarithmusfunktion $f(x) = \log_a(x)$ hat als Definitionsmenge die Menge der positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}^+$, da die Exponentialfunktion a^x nur positive Werte annehmen kann. Ihre Zielmenge sind alle reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Grafisch entsteht der Graph der Logarithmusfunktion durch Spiegelung des Graphen der Exponentialfunktion an der Winkelhalbierenden $y = x$, genau wie bei jedem anderen Paar von Funktion und Umkehrfunktion.

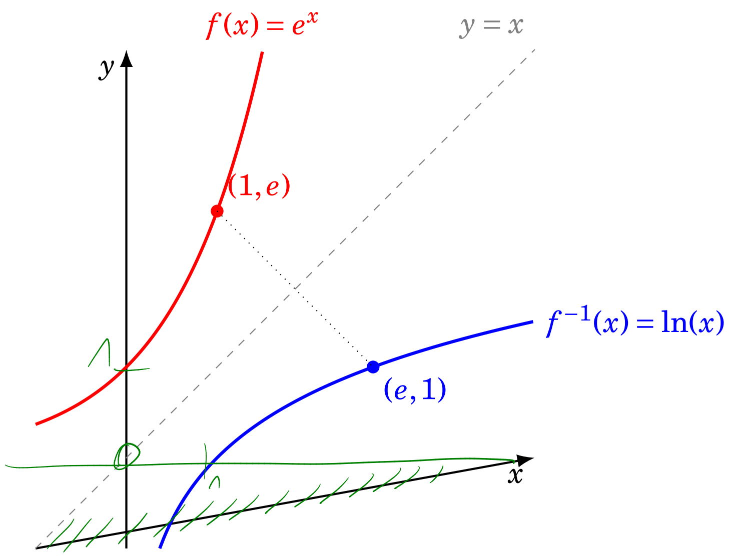

Abbildung 2: Die natürliche Exponentialfunktion e^x (rot) und ihre Umkehrfunktion, der natürliche Logarithmus $\ln(x)$ (blau), sind Spiegelbilder voneinander an der Geraden $y = x$ (grau gestrichelt).

6.4 Wichtige Basen und Rechenregeln für Logarithmen

Obwohl prinzipiell jede positive Zahl ungleich 1 als Basis für einen Logarithmus dienen kann, haben sich in der Praxis drei Basen als besonders nützlich erwiesen:

Der **dekadische Logarithmus** verwendet die Basis 10 und wird oft als $\lg(x)$ geschrieben. Er ist eng mit unserem Dezimalsystem verbunden und hilft bei der Abschätzung von Größenordnungen.

Der **binäre Logarithmus** (auch dualer Logarithmus) hat die Basis 2 und wird mit $\mathrm{lb}(x)$ oder $\mathrm{ld}(x)$ bezeichnet. Er ist das Fundament der Informationstheorie ~~und Informatik~~, da er die Anzahl der benötigten Bits zur Darstellung einer bestimmten Anzahl von Zuständen angibt.

Demnächst mehr dazu!

Der **natürliche Logarithmus** ist der wichtigste in der höheren Mathematik und den Naturwissenschaften. Er hat die Eulersche Zahl $e \approx 2.71828\ldots$ als Basis und wird als $\ln(x)$ geschrieben. Seine besondere Bedeutung rührt daher, dass die Exponentialfunktion e^x die einzigartige Eigenschaft besitzt, ihre eigene Ableitung zu sein, was die mathematische Behandlung von Wachstums- und Zerfallsprozessen enorm vereinfacht.

Da der Logarithmus die Umkehrung des Exponierens ist, lassen sich die Rechenregeln für Potenzen direkt in Regeln für Logarithmen übersetzen. Für $u, v > 0$ und eine beliebige Basis a gilt:

Der Logarithmus eines Produkts ist die Summe der einzelnen Logarithmen. Dies wandelt eine Multiplikation in eine einfachere Addition um.

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$$

Der Logarithmus eines Quotienten ist die Differenz der einzelnen Logarithmen, was eine Division in eine Subtraktion überführt.

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

Der Logarithmus einer Potenz kann vereinfacht werden, indem der Exponent als Faktor vor den Logarithmus gezogen wird.

$$\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$$

Manchmal ist es notwendig, die Basis eines Logarithmus zu wechseln. Dies gelingt mit der Basiswechselformel, die zeigt, dass alle Logarithmusfunktionen letztlich proportional zueinander sind. Um $\log_a(x)$ mit einer neuen Basis b auszudrücken, rechnet man:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Dies bedeutet, dass sich Logarithmen zu verschiedenen Basen nur um einen konstanten Faktor ($\frac{1}{\log_b(a)}$) unterscheiden. Man muss also nur einen einzigen Logarithmus (z.B. den natürlichen ln) berechnen können, um den Logarithmus zu jeder beliebigen anderen Basis zu bestimmen.

$$x = a^{\log_a(x)} = \left(b^{\log_b(a)}\right)^{\log_a(x)} = b^{\log_b(a)\cdot\log_a(x)}$$

$$= b^{\log_b(x)}$$

Exponenten müssen übereinstimmen!

6.5 Anwendungen in der Praxis

Die Fähigkeit des Logarithmus, Multiplikationen in Additionen und Potenzen in Multiplikationen zu verwandeln, macht ihn zu einem unschätzbaren Werkzeug in vielen Disziplinen.

Eine der wichtigsten Anwendungen sind **logarithmische Diagramme**. Wenn Daten einen riesigen Wertebereich umfassen, wie zum Beispiel die Bevölkerungsentwicklung über Jahrhunderte oder die Helligkeit von Sternen, würde eine normale lineare Skala die kleinen Werte unleserlich machen. Trägt man stattdessen den Logarithmus der Werte auf einer Achse auf, werden exponentielle Zusammenhänge als Geraden sichtbar, und riesige Wertebereiche lassen sich übersichtlich darstellen.

Schallpegel und ähnliche Größen werden ungefähr

~~Die Lautstärke wird~~ in **Dezibel (dB)** gemessen, einer logarithmischen Skala. Unser Gehör nimmt Lautstärke nicht linear, sondern logarithmisch wahr. Eine Erhöhung der Schallleistung um den Faktor 10 empfinden wir nur als eine Verdopplung der Lautheit. Die Dezibel-Skala bildet diese Wahrnehmung ab: Eine Zunahme um 10 dB entspricht einer Verzehnfachung der Schallintensität.

In der Musik beschreibt die Oktave eine Verdopplung der Frequenz eines Tones. Der musikalische Abstand zwischen zwei Tönen wird daher am natürlichsten durch den Logarithmus zur Basis 2 beschrieben. Die Anzahl der Oktaven zwischen den Frequenzen f_1 und f_2 ist $\log_2(f_2/f_1)$.

In der Informatik misst der **Informationsgehalt** einer Nachricht in Bit. Wenn ein Ereignis eine von N gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten sein kann, beträgt der Informationsgehalt, den man durch das Wissen über das tatsächliche Ergebnis erlangt, $\mathrm{lb}(N) = \log_2(N)$ Bit. Dies entspricht der Anzahl an Ja/Nein-Fragen, die man im Durchschnitt stellen muss, um das Ergebnis eindeutig zu identifizieren.

Gelaber

Exponential- und Logarithmusfunktionen sind somit nicht nur abstrakte mathematische Konzepte, sondern eine grundlegende Sprache zur Beschreibung der Welt, von den Finanzen über die Biologie bis hin zur Physik und Informatik.