IMA 1: Analysis. Skript Woche 7

Version: 2025-11-03

Skript generiert von Gemini 2.5 Pro, in Grün kommentiert und korrigiert von Jörn Loviscach

7 Eulersche Zahl und natürliche Exponentialfunktion

In der bisherigen Betrachtung von Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a^x$ war die Basis a eine beliebige positive Zahl. Wir haben gesehen, wie sich der Graph für $a > 1$ von links unten nach rechts oben windet und für $0 < a < 1$ von links oben nach rechts unten fällt. Alle diese Graphen haben gemeinsam, dass sie die y-Achse im Punkt $(0, 1)$ schneiden, denn jede Zahl (außer Null) hoch Null ergibt Eins.

je nach Zusammenhang

Was diese Graphen jedoch unterscheidet, ist ihre Steigung in diesem Punkt. Diese Eigenschaft mag zunächst willkürlich erscheinen, entpuppt sich aber als der Schlüssel zu einer der tiefsten und weitreichendsten Verbindungen in der gesamten Mathematik. Wir begeben uns nun auf die Suche nach einer ganz besonderen Basis, die uns die Tür zu den komplexen Zahlen und einer völlig neuen Beschreibung von Schwingungen und Wellen öffnen wird.

7.1 Der Trick mit der Zahl e

Betrachten wir die Graphen der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $g(x) = 3^x$ in der Nähe ihres gemeinsamen Schnittpunktes mit der y-Achse, also bei $(0, 1)$. Wenn wir in diesen Punkt hineinzoomen, sehen die gekrümmten Graphen immer mehr wie Geraden aus. Die Steigung dieser Geraden, der sogenannten Tangenten, ist ein Maß dafür, wie „steil" die Funktion an dieser Stelle wächst.

Ein besonders einfacher und „natürlicher" Anstieg wäre die Steigung 1. Eine Gerade mit der Steigung 1 bildet mit der x-Achse einen Winkel von 45 Grad. Vergleichen wir nun die Steilheit von 2^x und 3^x mit dieser 45-Grad-Linie, die durch den Punkt $(0, 1)$ geht (also die Geradengleichung $y = 1 + x$ hat).

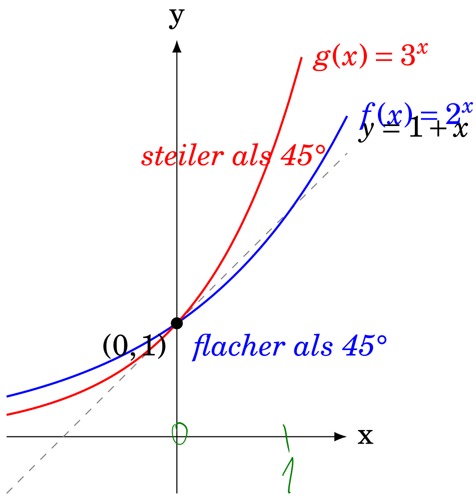

Abbildung 1: Die Graphen von 2^x und 3^x im Vergleich zur Tangente mit Steigung 1 im Punkt $(0,1)$. Die Funktion 2^x steigt hier flacher an, die Funktion 3^x steiler.

Wie die Abbildung 1 verdeutlicht, verläuft der Graph von 2^x im Punkt $(0,1)$ flacher als die 45-Grad-Linie, seine Steigung ist also kleiner als 1. Der Graph von 3^x hingegen verläuft steiler, seine Steigung ist größer als 1. Da die Steigung der Funktion a^x im Punkt $(0,1)$ kontinuierlich mit der Basis a anwächst, muss es eine ganz spezielle Basis zwischen 2 und 3 geben, für die die Steigung exakt 1 beträgt. Diese besondere Zahl nennen wir die **Eulersche Zahl** und bezeichnen sie mit dem Buchstaben e.

Die definierende Eigenschaft der Zahl e ist also: Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ hat an der Stelle $x = 0$ die Steigung 1.

Diese Eigenschaft ist ungemein praktisch. In der Sprache der Näherungen bedeutet sie, dass sich die Funktion e^x für Werte von x, die sehr nahe bei Null liegen, wie die Funktion $y = 1 + x$ verhält. Wir können also schreiben:

$$e^x \approx 1 + x \quad \text{für } x \text{ nahe } 0$$

Man kann dies leicht mit einem Taschenrechner überprüfen. Tippt man zum Beispiel eine sehr kleine Zahl wie $x = 0{,}00123$ ein, so erhält man $e^{0{,}00123} \approx 1{,}00123076$, was in der Tat sehr nahe an $1 + 0{,}00123$ liegt.

Dieser unscheinbare Zusammenhang ist der Schlüssel, um die Zahl e und die Funktion e^x mit den Grundrechenarten zu bestimmen! Der Trick besteht darin, einen beliebigen Wert x als Ergebnis eines schrittweisen Prozesses darzustellen. Wir nutzen dazu ein Potenzgesetz: $e^x = (e^{x/N})^N$. Wir können x in N winzig kleine Stücke der Größe x/N zerlegen. Wenn wir die Zahl N nun riesengroß wählen, wird der Term x/N sehr klein und damit sehr nahe bei Null sein. Für diesen kleinen Term dürfen wir unsere Näherung anwenden:

$$e^{x/N} \approx 1 + \frac{x}{N}$$

Setzen wir diese Näherung wieder in unsere ursprüngliche Gleichung ein, erhalten wir eine fantastische Formel, die e^x durch einfache Operationen annähert:

$$e^x = \left(e^{x/N}\right)^N \approx \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$$

Je größer wir N wählen, desto kleiner wird das Stück x/N, desto genauer wird unsere Näherung $e^{x/N} \approx 1 + x/N$, und desto besser nähert der gesamte Ausdruck den wahren Wert von e^x an. Man sagt, dass der Ausdruck $\left(1+\frac{x}{N}\right)^N$ für N gegen unendlich gegen e^x konvergiert.

Dieser Ausdruck lässt sich mit dem Binomischen Lehrsatz ausmultiplizieren. Das ist eine etwas längere Rechnung, die man typischerweise in Übungen oder Seminaren durchführt. ! Das Ergebnis dieser Ausmultiplikation und des anschließenden Grenzübergangs für $N \to \infty$ ist die berühmte Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$

Diese Formel ist von fundamentaler Bedeutung, denn sie erlaubt uns, den Wert von e^x für *jedes* beliebige x mit jeder gewünschten Genauigkeit zu berechnen, und das nur durch Addition und Multiplikation!

Indem wir in diese Reihe den speziellen Wert $x = 1$ einsetzen, erhalten wir eine Formel für die Zahl e selbst:

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$$

Rechnet man die ersten Terme zusammen, sieht man, wie sich der Wert der Zahl $e \approx 2{,}71828...$ annähert. Wir haben also eine geheimnisvolle Zahl, die durch eine sehr „natürliche“ Anforderung (Steigung 1) definiert ist, auf eine Formel zurückgeführt, die nur die Grundrechenarten benötigt.

7.2 Der natürliche Logarithmus

Jede Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ hat eine Umkehrfunktion, den Logarithmus zur Basis a, geschrieben als $\log_a(x)$. Die Umkehrfunktion der besonderen Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist ebenfalls etwas Besonderes und erhält einen eigenen Namen: der **natürliche Logarithmus**, bezeichnet als $\ln(x)$. Es gilt also per Definition:

$$y = e^x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln(y)$$

Der natürliche Logarithmus beantwortet die Frage: „Mit welcher Zahl muss ich e potenzieren, um y zu erhalten?“ Graphisch entsteht der Graph von $\ln(x)$ durch Spiegelung des Graphen von e^x an der Winkelhalbierenden $y = x$.

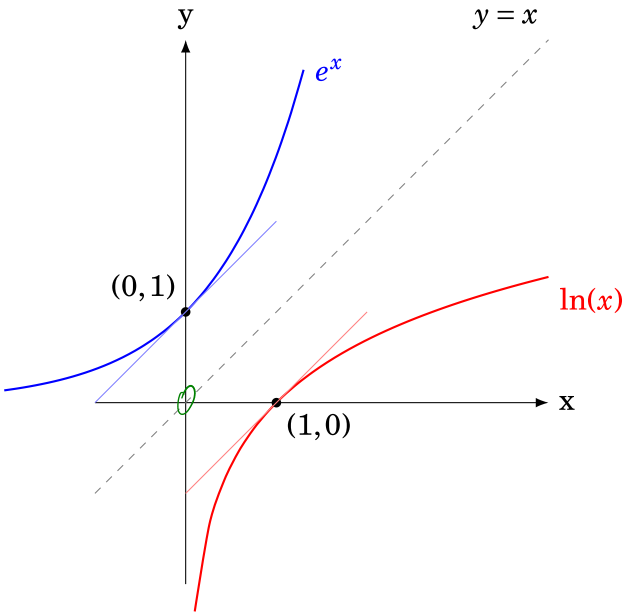

Abbildung 2: Die Graphen der natürlichen Exponentialfunktion e^x und des natürlichen Logarithmus $\ln(x)$ sind Spiegelbilder voneinander bezüglich der Achse $y = x$. Die Tangente an e^x im Punkt $(0,1)$ hat die Steigung 1. Gespiegelt ergibt dies die Tangente an $\ln(x)$ im Punkt $(1,0)$, die ebenfalls die Steigung 1 hat.

Auch für den natürlichen Logarithmus können wir aus der Eigenschaft von e^x eine Näherung für Werte nahe seines „Entwicklungspunktes“ finden. Wir wissen, dass für ~~ein kleines x~~ x nahe 0 gilt: $e^x \approx 1 + x$. Wenn wir auf beide Seiten dieser Näherung den natürlichen Logarithmus anwenden, erhalten wir:

$$\ln(e^x) \approx \ln(1 + x)$$

Da $\ln(x)$ und e^x sich gegenseitig aufheben, vereinfacht sich die linke Seite zu x:

$$x \approx \ln(1 + x) \quad \text{für } x \text{ nahe } 0$$

Diese Näherung besagt, dass der Graph von $\ln(1 + x)$ in der Nähe von $x = 0$ (was dem Punkt $(1,0)$ auf dem Graphen von $\ln(x)$ entspricht) ebenfalls eine Steigung von 1 hat, was man in Abbildung 2 gut erkennen kann.

Ähnlich wie bei der Exponentialfunktion können wir versuchen, für den Logarithmus eine Potenzreihe zu finden. Wir machen den Ansatz:

$$\ln(1 + x) = x + ax^2 + bx^3 + \ldots$$

Typografische Anmerkung:
Die drei Punkte gehören hier
und anderswo im Text auf die
Höhe des +.

wobei wir die Koeffizienten $a, b, \ldots$ noch nicht kennen. Um sie zu bestimmen, wenden wir auf beide Seiten die e-Funktion an. Links heben sich e und $\ln$ auf:

$$e^{\ln(1+x)} = 1 + x$$

Rechts erhalten wir einen Ausdruck, den wir mit den Potenzgesetzen umformen:

$$e^{x+ax^2+bx^3+\ldots} = e^x \cdot e^{ax^2} \cdot e^{bx^3} \cdot \ldots$$

Nun ersetzen wir jeden einzelnen e-Term durch seine bekannte Potenzreihe:

$$1+x = \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)\cdot\left(1+(ax^2)+\frac{(ax^2)^2}{2!}+\dots\right)\cdot\left(1+(bx^3)+\dots\right)\cdot\dots$$

Jetzt müssen wir die rechte Seite ausmultiplizieren und die Koeffizienten der Potenzen von x mit der linken Seite $(1+x)$ vergleichen. Die Terme mit x^0 (Konstanten) und x^1 stimmen bereits überein: $1=1$ und $x=x$. Schauen wir uns den Koeffizienten von x^2 an. Auf der linken Seite gibt es keinen x^2-Term, sein Koeffizient ist also 0. Auf der rechten Seite entsteht x^2 durch Multiplikation von $\frac{x^2}{2!}$ aus der ersten Klammer mit der 1 aus der zweiten, und durch Multiplikation der 1 aus der ersten Klammer mit ax^2 aus der zweiten. Alle anderen Kombinationen ergeben höhere Potenzen von x. Also gilt:

$$\text{Koeffizient von } x^2: \quad \frac{1}{2!}+a=0 \quad\Longrightarrow\quad a=-\frac{1}{2}$$

Ein ähnlicher Koeffizientenvergleich für x^3 liefert $b=\frac{1}{3}$, und so weiter. Damit ergibt sich die Potenzreihe für den natürlichen Logarithmus:

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

Auch wenn diese Reihe für die praktische Berechnung des Logarithmus oft zu langsam konvergiert, ist ihre ~~Existenz~~ simple Art ein weiterer Beleg für die fundamentale Natur der Zahl e.

7.3 Der Weg zu den komplexen Zahlen

Bisher haben wir uns ausschließlich im Bereich der reellen Zahlen bewegt. Die Zahlengerade ist uns vertraut. Die komplexen Zahlen erweitern diese Gerade zu einer Ebene, der **Gaußschen Zahlenebene**. Eine komplexe Zahl $z = a + bi$ hat einen Realteil a und einen Imaginärteil b. Wir können sie als Punkt mit den Koordinaten (a, b) oder als Vektor vom Ursprung zu diesem Punkt darstellen.

Die Multiplikation von komplexen Zahlen hat eine wunderbare geometrische Interpretation. Betrachten wir zunächst die einfachste Multiplikation mit der imaginären Einheit i. Sei $z = a + bi$ eine beliebige komplexe Zahl. Ihr Produkt mit i ist:

$$i \cdot z = i \cdot (a + bi) = ia + bi^2 = ia - b = -b + ai$$

Der neue Punkt hat die Koordinaten $(-b, a)$. Was bedeutet das geometrisch?

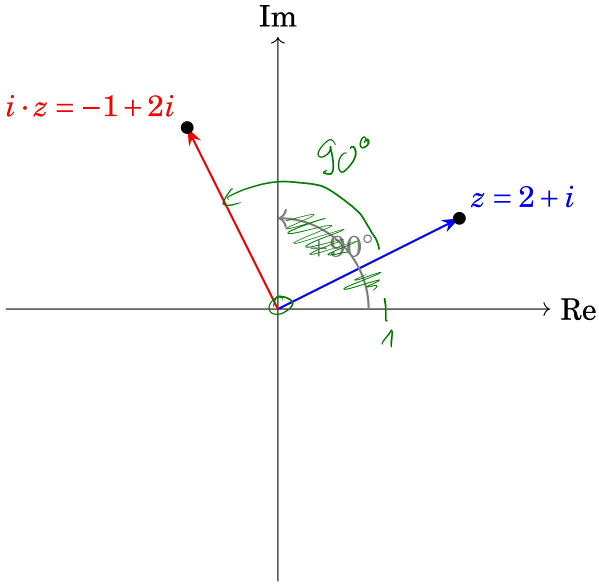

Abbildung 3: Geometrische Deutung der Multiplikation mit i. Der Vektor zum Punkt z wird um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn gedreht, um den Vektor zum Punkt $i \cdot z$ zu erhalten.

Wie in Abbildung 3 zu sehen ist, entspricht die Multiplikation mit i einer Drehung des Vektors um 90 Grad (oder $\pi/2$ im Bogenmaß) gegen den Uhrzeigersinn. Die Länge des Vektors bleibt dabei unverändert.

Dieses Prinzip lässt sich verallgemeinern. Jede komplexe Zahl z kann nicht nur durch ihre kartesischen Koordinaten (a, b), sondern auch durch ihre Polarkoordinaten beschrieben werden: ihre Länge (Betrag) $r = |z|$ und ihren Winkel $\varphi = \arg(z)$ zur positiven reellen Achse. Die fundamentale Regel der komplexen Multiplikation lautet:

Das Produkt zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 erhält man, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Winkel addiert.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{und} \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

bis auf ganzzahlige Vielfache von 2 pi

Die Multiplikation in der komplexen Ebene ist also eine Drehstreckung. Die Multiplikation mit i ist ein Spezialfall davon: i hat die Länge 1 und den Winkel 90°, also wird bei der

Multiplikation mit i die Länge mit 1 multipliziert (bleibt gleich) und der Winkel um 90° vergrößert (Drehung).

7.4 Die Eulersche Formel

Was passiert nun, wenn wir in unsere wunderbare Formel für die Exponentialfunktion

$$e^x = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N$$

statt einer reellen Zahl x einen rein imaginären Wert $i\varphi$ einsetzen? Was soll $e^{i\varphi}$ bedeuten? Es kann sicherlich nicht heißen, dass wir die Zahl e „i mal phi Mal“ mit sich selbst multiplizieren. Die Formel auf der rechten Seite gibt uns jedoch einen Weg, diesem Ausdruck einen Sinn zu geben. Wir untersuchen den Ausdruck:

$$e^{i\varphi} \approx \left(1+\frac{i\varphi}{N}\right)^N \quad \text{für ein riesiges } N$$

Betrachten wir zunächst nur den Term in der Klammer: $z_N = 1+\frac{i\varphi}{N}$. Dies ist eine komplexe Zahl mit Realteil 1 und Imaginärteil φ/N. Für ein sehr großes N ist der Imaginärteil winzig.

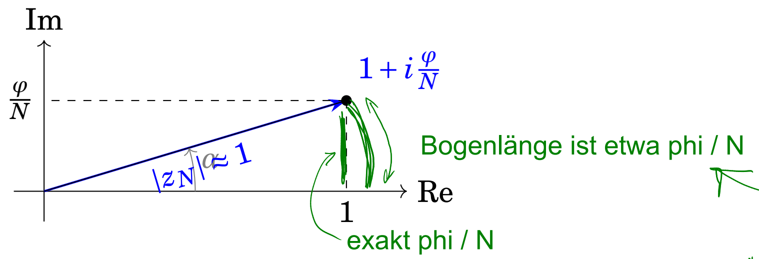

Abbildung 4: Die komplexe Zahl $1+i\frac{\varphi}{N}$ für ein großes N. Sie liegt sehr nahe am Punkt (1,0). Ihr Betrag ist nur unwesentlich größer als 1, und ihr Winkel α ist (im Bogenmaß) fast genau φ/N.

Wie in Abbildung 4 skizziert, können wir den Betrag und den Winkel von z_N bestimmen:

- **Betrag:** $|z_N| = \sqrt{1^2+(\frac{\varphi}{N})^2} = \sqrt{1+\frac{\varphi^2}{N^2}}$. Da $\frac{\varphi^2}{N^2}$ für große N verschwindend klein ist, ist die Wurzel nur minimal größer als 1. Aus der Zeichnung offensichtlich!
- **Winkel:** Der Winkel α genügt $\tan(\alpha) = \frac{\varphi/N}{1} = \frac{\varphi}{N}$. Für sehr kleine Winkel (im Bogenmaß!) gilt die Näherung $\tan(\alpha) \approx \alpha$. Also ist der Winkel $\alpha \approx \frac{\varphi}{N}$. Ebenfalls aus der Zeichnung offensichtlich!

Die komplexe Zahl $1+i\frac{\varphi}{N}$ ist also eine Zahl mit einem Betrag von fast 1 und einem kleinen Winkel von ca. φ/N.

Was bedeutet es nun, diese Zahl mit sich selbst zu ~~potenzieren~~ multiplizieren, also $z_N^N = \left(1+i\frac{\varphi}{N}\right)^N$ zu bilden? Wir nutzen unsere geometrische Regel der komplexen Multiplikation:

- **Betrag des Produkts:** $|z_N^N| = |z_N|^N \approx 1^N = 1$.
- **Winkel des Produkts:** $\arg(z_N^N) = N\cdot\arg(z_N) \approx N\cdot\frac{\varphi}{N} = \varphi$.

Unsere Annäherung $\left(1+i\frac{\varphi}{N}\right)^N$ beschreibt also eine komplexe Zahl, deren Betrag ungefähr 1 ist und deren Winkel ungefähr φ beträgt. Je größer wir N wählen, desto exakter werden unsere Näherungen. Im Grenzwert für $N \to \infty$ wird das Ergebnis exakt:

$e^{i\varphi}$ ist die komplexe Zahl mit dem Betrag 1 und dem Winkel φ.

Punkte mit dem Betrag 1 liegen in der Gaußschen Zahlenebene auf dem Einheitskreis. Ein Punkt auf dem Einheitskreis mit dem Winkel φ hat aber nach der Definition von Sinus und Cosinus am Einheitskreis die Koordinaten $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$. Als komplexe Zahl geschrieben ist dies $\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$. Damit haben wir eine der schönsten und mächtigsten Formeln der Mathematik hergeleitet, die **Eulersche Formel**:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

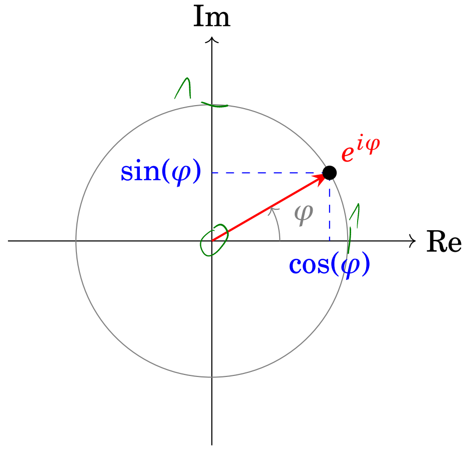

Abbildung 5: Visualisierung der Eulerschen Formel. Die komplexe Zahl $e^{i\varphi}$ ist der Punkt auf dem Einheitskreis der Gaußschen Zahlenebene, der mit der positiven reellen Achse den Winkel φ (im Bogenmaß) einschließt.

Ein berühmter Spezialfall dieser Formel ergibt sich für den Winkel $\varphi = \pi$ (also 180 Grad). Dann ist $\cos(\pi) = -1$ und $\sin(\pi) = 0$. Die Formel lautet:

$$e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0 = -1$$

Umgestellt ergibt dies die **Eulersche Identität** $e^{i\pi} + 1 = 0$, die fünf der wichtigsten Konstanten der Mathematik $(e, i, \pi, 1, 0)$ in einer einzigen, einfachen Gleichung vereint.

7.5 Potenzreihen für Sinus und Cosinus

Die Eulersche Formel bietet uns einen direkten Weg, auch für Sinus und Cosinus Potenzreihen zu finden. Wir starten mit der Potenzreihe für e^z und setzen $z = i\varphi$:

$$e^{i\varphi} = 1 + (i\varphi) + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \ldots$$

Nun nutzen wir die Potenzen von i: $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, usw.

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \ldots$$

Jetzt sortieren wir die Terme nach ihrem Real- und Imaginärteil:

$$e^{i\varphi} = \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\right)}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots\right)}_{\text{Imaginärteil}}$$

Vergleichen wir dies mit der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, so müssen die Realteile und die Imaginärteile jeweils übereinstimmen. Daraus lesen wir direkt die Potenzreihen für Cosinus und Sinus ab:

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}$$

Vorsicht: Winkel im Bogenmaß!

$$\sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Damit haben wir auch die trigonometrischen Funktionen auf die Grundrechenarten zurückgeführt. Computer und Taschenrechner verwenden zwar in der Praxis oft noch effizientere Algorithmen, aber diese Reihen bilden die theoretische Grundlage dafür, Sinus- und Cosinuswerte für jeden beliebigen Winkel mit beliebiger Genauigkeit berechnen zu können.

7.6 Additionstheoreme

Jeder, der in der Schule die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus mit komplizierten geometrischen Konstruktionen am Einheitskreis beweisen musste, wird die folgende Herleitung zu schätzen wissen. Die Eulersche Formel macht den Beweis trivial. Betrachten wir den Ausdruck $e^{i(\alpha+\beta)}$. Nach den Potenzgesetzen, die auch für komplexe Exponenten gelten, können wir schreiben: Beweis nötig! ;-)

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$$

Nun wenden wir auf beide Seiten die Eulersche Formel an. Die linke Seite wird zu:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

Die rechte Seite wird zu:

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot (\cos\beta + i\sin\beta)$$

Multiplizieren wir die rechte Seite aus (und beachten $i^2 = -1$):

$$= \cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta$$

$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

Nun setzen wir die umgeformte linke und rechte Seite gleich. Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn ihre Realteile und ihre Imaginärteile übereinstimmen. Durch Vergleich des Realteils erhalten wir das Additionstheorem für den Cosinus:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Durch Vergleich des Imaginärteils erhalten wir das Additionstheorem für den Sinus:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Dieser Beweis ist nicht nur verblüffend einfach, er zeigt auch die tiefe innere Verbindung zwischen Exponentialfunktionen und der Trigonometrie.

In vielen Bereichen der Physik und Ingenieurwissenschaften, insbesondere in der Wechselstromlehre oder der Signalverarbeitung, erspart einem die Schreibweise $e^{i\varphi}$ die ständige Verwendung der Additionstheoreme. Eine Schwingung mit einer Phasenverschiebung zu beschreiben, ist mit Sinus und Cosinus oft umständlich. In der komplexen Schreibweise entspricht eine Phasenverschiebung einfach der Addition im Exponenten. Berechnungen werden dadurch dramatisch vereinfacht, da die einfachen und intuitiven Potenzgesetze an die Stelle der mühsamen Additionstheoreme treten. Der „Trick mit der Zahl e" hat uns also nicht nur ein tieferes Verständnis der Analysis gebracht, sondern auch ein äußerst mächtiges Werkzeug für praktische Anwendungen geliefert.