IMA 1: Analysis. Skript Woche 8

Version: 2025-11-07

Skript generiert von Gemini 2.5 Pro, in Grün kommentiert und korrigiert von Jörn Loviscach

8 Folgen, Reihen, Grenzwerte

In diesem Kapitel betreten wir die faszinierende Welt des Unendlichen. Bisher haben wir uns in der Mathematik meist mit endlichen Prozessen beschäftigt: dem Lösen von Gleichungen, dem Berechnen von Ableitungen an einem Punkt oder dem Integrieren über ein festes Intervall. Doch viele Phänomene in der Natur und Technik lassen sich nur verstehen, wenn wir Prozesse betrachten, die unendlich oft wiederholt werden. Denken Sie an das Einschwingverhalten eines elektrischen Schwingkreises, das sich einem stabilen Zustand annähert, oder an die Approximation einer komplexen Funktion durch eine Summe einfacherer Terme. Die mathematischen Werkzeuge, um solche unendlichen Prozesse präzise zu beschreiben, sind Folgen, Reihen und der zentrale Begriff des Grenzwertes.

8.1 Der Begriff der Folge

Einheiten _nicht_ kursiv!

Stellen Sie sich vor, Sie messen im Labor die Spannung an einem Kondensator, der sich langsam entlädt. Sie notieren den Wert zu Beginn ($t = 0s$), nach einer Sekunde ($t = 1s$), nach zwei Sekunden ($t = 2s$) und so weiter. Was Sie erhalten, ist eine geordnete Abfolge von Zahlen, zum Beispiel (5V, 1,8V, 0,7V, 0,25V, ...). Genau das ist die intuitive Idee einer mathematischen Folge: eine unendlich lange, geordnete Liste von Zahlen.

Formal ist eine Folge nichts anderes als eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ (dem „Zeitpunkt“ oder Index) genau eine reelle Zahl a_n (den „Messwert“ oder das Folgenglied) zuordnet. Wir schreiben eine Folge als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder, wenn der Kontext klar ist, einfach als (a_n). Das n-te Glied der Folge, a_n, wird durch eine explizite oder rekursive Vorschrift bestimmt.

explizit ist z.B. (3n+1)/n²
rekursiv ist z.B. $a_{n+1} = 3a_n - 4$

Betrachten wir einige grundlegende Beispiele. Die einfachste Folge ist die konstante Folge, etwa $a_n = 3$. Jedes Folgenglied ist hier identisch: $(3, 3, 3, \ldots)$. Ein anderes einfaches Beispiel ist die Folge der ungeraden Zahlen, gegeben durch die Vorschrift $a_n = 2n - 1$ für $n \geq 1$. Die Folge lautet dann $(1, 3, 5, 7, \ldots)$.

Besonders interessant für unsere weiteren Betrachtungen sind Folgen, deren Glieder sich einem bestimmten Wert annähern. Ein Paradebeispiel hierfür ist die Folge $a_n = \frac{1}{n}$. Die Glieder lauten $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$. Es ist offensichtlich, dass diese Werte immer kleiner werden und sich der Null annähern. Eine andere wichtige Verhaltensweise zeigen alternierende Folgen, bei denen das Vorzeichen wechselt, wie zum Beispiel bei $b_n = (-1)^n$. Diese Folge springt unablässig zwischen den Werten -1 und 1 hin und her: $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$.

Die Visualisierung von Folgen hilft ungemein, ihr Verhalten zu verstehen. Man kann die Folgenglieder entweder auf dem Zahlenstrahl oder in einem Koordinatensystem eintragen, wobei die x-Achse den Index n und die y-Achse den Wert a_n darstellt.

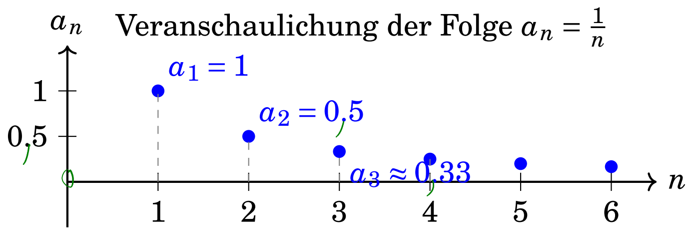

Abbildung 1: Die ~~ersten~~ Glieder der Folge $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ nähern sich der Nulllinie an.

8.2 Grenzwert einer Folge

Die entscheidende Frage bei der Untersuchung von Folgen lautet: Wohin „strebt“ die Folge, wenn der Index n immer größer wird, also gegen unendlich geht? Das Verhalten der Folge $a_n = \frac{1}{n}$ aus Abbildung 1 legt nahe, dass sich die Glieder einem festen Wert, nämlich der Null, annähern. Diesen Zielwert nennen wir den Grenzwert oder Limes der Folge.

Eine Folge (a_n) heißt **konvergent** gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn die Folgenglieder für hinreichend große n dem Wert a beliebig nahe kommen. Wir schreiben dann:
und dann auch nicht mehr entfliehen

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

$\pm\varepsilon$

Das „beliebig nahe kommen“ ist der Kern der Sache. Stellen Sie sich um den Grenzwert a einen beliebig schmalen horizontalen Streifen vor. Konvergenz bedeutet, dass es einen Index N gibt, ab dem *alle* nachfolgenden Glieder a_n (für $n > N$) innerhalb dieses Streifens liegen und ihn nie wieder verlassen. Egal wie schmal wir den Streifen wählen, wir finden immer einen solchen Index N. Die ersten endlich vielen Glieder der Folge spielen für die Konvergenz keine Rolle; es kommt nur auf das Verhalten im Unendlichen an.

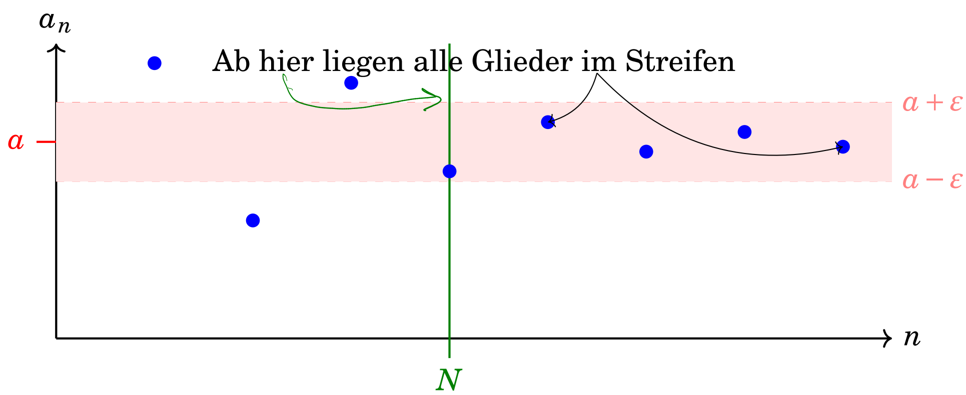

Abbildung 2: Visuelle Darstellung der Konvergenz. Ab dem Index N verlassen die Folgenglieder den ε-Streifen um den Grenzwert a nicht mehr.

Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt **divergent**. Hier gibt es zwei wichtige Unterfälle. Die Folge $a_n = n^2 = (1, 4, 9, \dots)$ wird ohne jede Schranke immer größer. Wir sagen, sie divergiert **bestimmt** gegen unendlich (∞). Analog divergiert $a_n = -n$ bestimmt gegen minus unendlich ($-\infty$). Die alternierende Folge $b_n = (-1)^n = (-1, 1, -1, \dots)$ ist ebenfalls divergent, aber nicht bestimmt. Sie springt zwischen zwei Werten hin und her und nähert sich keinem einzigen Zielwert an.

8.3 Grenzwertsätze

Glücklicherweise müssen wir nicht für jede Folge das Konvergenzverhalten mühsam über die Definition nachweisen. Wenn wir die Grenzwerte einfacher Folgen kennen, können wir die Grenzwerte komplizierterer, daraus zusammengesetzter Folgen oft direkt berechnen. Dafür gibt es die Grenzwertsätze, die uns erlauben, den Limes-Operator mit den Grundrechenarten zu vertauschen.

Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gelten die folgenden, sehr intuitiven Regeln: Der Grenzwert der Summe ist die Summe der Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

Gleiches gilt für die Differenz. Nähert sich die eine Folge dem Wert a und die andere dem Wert b, so nähert sich ihre Summe eben der Summe $a+b$. Der Grenzwert des Produkts ist das Produkt der Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a \cdot b$$

Am wichtigsten und fehleranfälligsten ist die Regel für den Quotienten. Der Grenzwert des Quotienten ist der Quotient der Grenzwerte, **vorausgesetzt**, der Grenzwert des Nenners ist nicht Null:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, \quad \text{falls } b \neq 0$$

Die Bedingung $b \neq 0$ ist absolut entscheidend. Eine Division durch Null ist und bleibt undefiniert, auch im Reich der Grenzwerte.

Ein typisches Anwendungsbeispiel ist die Berechnung des Grenzwertes von gebrochen-rationalen Folgen. Betrachten wir die Folge $c_n = \frac{3n^2+5n}{2n^2-4}$. Sowohl Zähler als auch Nenner divergieren bestimmt gegen ∞. Wir können die Sätze also nicht direkt anwenden. Der Standardtrick besteht darin, im Zähler und Nenner die höchste Potenz von n auszuklammern, hier n^2:

$$c_n = \frac{n^2(3+\frac{5}{n})}{n^2(2-\frac{4}{n^2})} = \frac{3+\frac{5}{n}}{2-\frac{4}{n^2}}$$

Nun können wir die Grenzwertsätze anwenden. Wir wissen, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} = 0$. Damit erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{\lim(3) + \lim(\frac{5}{n})}{\lim(2) - \lim(\frac{4}{n^2})} = \frac{3+0}{2-0} = \frac{3}{2}$$

8.4 Grenzwerte von Funktionen

Das Konzept des Grenzwertes lässt sich von diskreten Folgen (a_n) auf kontinuierliche Funktionen $f(x)$ übertragen. Statt zu fragen, was für $n \to \infty$ passiert, fragen wir nun:

Welchem Wert nähert sich die Funktion $f(x)$, wenn sich die Variable x einem bestimmten Punkt x_0 annähert? Wir schreiben dies als:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Der entscheidende Unterschied ist, dass sich x dem Wert x_0 von allen Seiten nähern kann – von links (Werte kleiner als x_0) und von rechts (Werte größer als x_0). Damit der Grenzwert existiert, muss die Annäherung von beiden Seiten zum selben Zielwert L führen.

Ein zentraler Punkt ist hierbei, dass der Funktionswert $f(x_0)$ selbst für den Grenzwert an der Stelle x_0 völlig irrelevant ist. Die Funktion muss an der Stelle x_0 nicht einmal definiert sein! Wir fragen nur, wohin die Reise geht, wenn wir uns x_0 nähern.

Dieses Konzept ist Ihnen vielleicht schon bei der Diskussion von rationalen Funktionen und ihren Definitionslücken begegnet. Betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Der Nenner wird für $x = 2$ zu Null, also ist die Funktion an dieser Stelle nicht definiert. Wir haben eine Definitionslücke. Was passiert aber in der unmittelbaren Nähe von $x = 2$? Für alle $x \neq 2$ können wir den Bruch mit der dritten binomischen Formel kürzen:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$$

Der Graph der Funktion $f(x)$ ist also die Gerade $y = x + 2$, allerdings mit einem winzigen Loch an der Stelle $x = 2$. Wenn wir uns nun mit x der Stelle 2 nähern, sei es von links oder von rechts, nähern sich die Funktionswerte dem Wert $2 + 2 = 4$. Das Loch im Graphen befindet sich also am Punkt $(2,4)$. Wir sagen, der Grenzwert existiert und ist 4:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Dies ist ein Beispiel für eine **hebbare Definitionslücke**: Der Grenzwert existiert, obwohl die Funktion dort nicht definiert ist. Wir könnten die Lücke „stopfen“, indem wir definieren $f(2) := 4$.

8.5 Stetigkeit

Intuitiv, aber FALSCH! Zum Beispiel 1/x ist stetig, aber nicht in einem Zug zeichenbar.

Definitionslücken und sogar Polstellen sind ok!

Die intuitive Vorstellung von Stetigkeit ist, dass man den Graphen einer Funktion zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen. Es gibt keine Sprünge ~~und keine Löcher~~. Der Grenzwertbegriff erlaubt uns nun eine präzise mathematische Definition.

Eine Funktion f heißt **stetig** an einer Stelle x_0, wenn der Grenzwert an dieser Stelle existiert und mit dem Funktionswert übereinstimmt. Es müssen also drei Bedingungen erfüllt sein: 1. $f(x_0)$ ist definiert (es gibt keinen Pol und kein Loch). 2. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert (es gibt keinen Sprung). 3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (der Grenzwert ist genau der Funktionswert).

Die meisten uns bekannten Funktionen wie Polynome, Sinus, Cosinus, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

Die Eigenschaft der Stetigkeit ist von enormer praktischer Bedeutung, denn sie besagt, dass stetige Funktionen mit der Grenzwertbildung vertauscht werden dürfen. Ist f eine

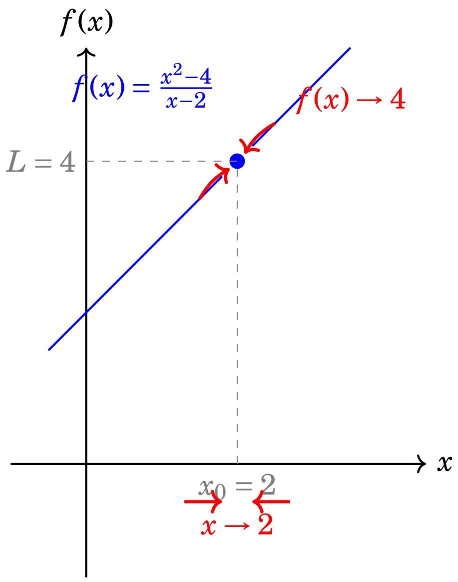

Abbildung 3: Grenzwert an einer hebbaren Definitionslücke. Obwohl $f(2)$ nicht existiert, nähert sich $f(x)$ dem Wert 4, wenn x sich 2 nähert.

stetige Funktion und (a_n) eine Folge, die gegen a konvergiert (wobei a im Definitionsbereich von f liegt), so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(a)$$

Das bedeutet, um den Grenzwert der Funktionswerte $f(a_n)$ zu finden, können wir zuerst den Grenzwert der Folge a_n berechnen und diesen dann in die Funktion f einsetzen. Dies vereinfacht viele Berechnungen erheblich. Beispielsweise ist die Kosinus-Funktion stetig. Was ist also der Grenzwert von $\cos(\frac{\pi}{n})$? Da $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} = 0$, können wir den Limes in die Funktion „hineinziehen“:

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\right) = \cos(0) = 1$$

Ohne das Wissen über Stetigkeit wäre es deutlich aufwändiger, das Verhalten der Folge $(\cos(\pi), \cos(\pi/2), \cos(\pi/3), \dots)$ direkt zu analysieren.

8.6 Der Begriff der Reihe

Nachdem wir unendliche Listen von Zahlen (Folgen) betrachtet haben, gehen wir nun einen Schritt weiter und fragen: Was passiert, wenn wir die unendlich vielen Glieder einer Folge aufsummieren? Eine solche unendliche Summe nennen wir eine **Reihe**.

Eine Reihe ist also formell geschrieben $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$. Aber was bedeutet dieses „unendlich oft addieren“ genau? Wir können nicht wirklich unendlich viele Zahlen addieren. Stattdessen definieren wir die Reihe über einen Grenzwertprozess. Wir bilden die Folge der **Partialsummen** (s_N):

$$
\begin{aligned}
s_0 &= a_0 \\
s_1 &= a_0 + a_1 \\
s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
s_N &= \sum_{n=0}^{N} a_n
\end{aligned}
$$

Wenn diese Folge der Partialsummen (s_N) für $N \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert S konvergiert, dann sagen wir, die Reihe konvergiert und ihr Wert ist S. Andernfalls divergiert die Reihe.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$$

Wir haben bereits einige der wichtigsten Reihen~~, die sogenannten Taylorreihen,~~ formal kennengelernt. Nun verstehen wir ihre tiefere Bedeutung. Die Exponentialfunktion kann als Reihe dargestellt werden:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Das bedeutet, dass die Partialsummen, also die Polynome $s_0 = 1$, $s_1 = 1 + x$, $s_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ usw., für jeden Wert von x immer bessere Näherungen für die Funktion e^x liefern. Die unendliche Summe ist nicht nur eine formale Schreibweise, sondern sie konvergiert tatsächlich gegen den exakten Funktionswert. Ähnliches gilt für Sinus, Kosinus und den Logarithmus:

$$
\begin{aligned}
\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \\
\cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots
\end{aligned}
$$

Diese Reihendarstellungen sind in der Elektrotechnik und Physik von unschätzbarem Wert, da sie es ermöglichen, komplizierte transzendente Funktionen durch einfache Polynome zu approximieren.

Doch nicht jede Reihe konvergiert so problemlos. Betrachten wir als neues, fundamentales Beispiel die **geometrische Reihe**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

Hier hängen die Folgenglieder von einem festen Faktor q ab. Um ihr Konvergenzverhalten zu untersuchen, betrachten wir die Partialsumme $s_N = 1 + q + \cdots + q^N$. Es gibt eine geschlossene Formel dafür: $s_N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ (für $q \neq 1$). Diese Formel lässt sich mit einem cleveren Trick herleiten. Wir schreiben die Summe auf und multiplizieren sie mit q:

$$\begin{aligned} s_N &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^N \\ q \cdot s_N &= \quad\;\; q + q^2 + \cdots + q^N + q^{N+1} \end{aligned}$$

Wenn wir nun die zweite Gleichung von der ersten subtrahieren, heben sich fast alle Terme auf der rechten Seite gegenseitig weg – es bleibt nur der erste Term der ersten Zeile und der letzte Term der zweiten Zeile übrig:

$$s_N - q \cdot s_N = 1 - q^{N+1}$$

Klammern wir auf der linken Seite s_N aus, erhalten wir $s_N(1-q) = 1 - q^{N+1}$. Division durch $(1-q)$ liefert die gewünschte Formel.

Was passiert nun, wenn $N \to \infty$? Das Schicksal der Reihe hängt einzig und allein vom Verhalten des Terms q^{N+1} ab:

- Wenn $|q| < 1$, also $-1 < q < 1$, dann wird q^{N+1} für $N \to \infty$ zu Null. Der Zähler geht gegen 1, und die Reihe konvergiert gegen den Wert $\frac{1}{1-q}$.
- Wenn $|q| \geq 1$, dann geht q^{N+1} nicht gegen Null. Für $q = 1$ wird die Summe zu $1 + 1 + 1 + \ldots$ und divergiert. Für $q > 1$ wächst q^{N+1} über alle Grenzen. Für $q \leq -1$ springen die Werte der Partialsummen hin und her. In all diesen Fällen divergiert die Reihe.

Das Ergebnis ist fundamental: Die geometrische Reihe konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$. Und dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1$$

Siehe Abb. 4!

Dieses Beispiel zeigt uns eindrücklich, dass die Konvergenz einer Reihe stark von den Werten abhängen kann, für die sie ausgewertet wird. Während die Reihen für e^x, $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für alle reellen Zahlen x konvergieren, ist dies bei der geometrischen Reihe oder der Reihe für $\ln(1+x)$ nicht der Fall. Man kann sich leicht überlegen, warum die Logarithmus-Reihe nicht für alle x konvergieren kann, indem man die Reihenglieder selbst betrachtet. Eine ganz grundlegende Voraussetzung dafür, dass eine unendliche Summe überhaupt einen endlichen Wert annehmen kann, ist, dass die addierten Zahlen irgendwann beliebig klein werden müssen. Die Folge der Reihenglieder muss also gegen Null konvergieren. Betrachten wir die Glieder der Logarithmus-Reihe, $a_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, zum Beispiel für $x = 2$. Die Beträge der Glieder sind $\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{8}{3}, \ldots$. Diese Folge wächst ins Unendliche und geht nicht gegen Null. Die Partialsummen können sich also niemals auf einen festen Wert „einpendeln“. Dasselbe gilt für jedes x mit $|x| > 1$. Allein aus dieser Überlegung folgt, dass die Reihe nur für $|x| \leq 1$ eine Chance hat zu konvergieren.

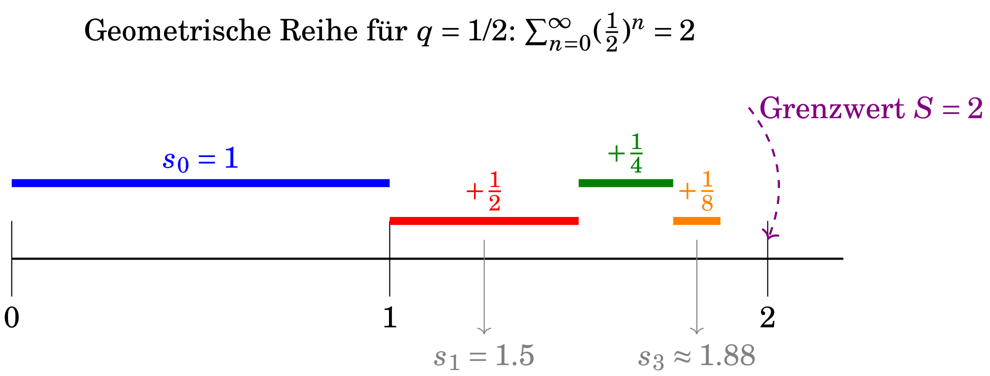

Abbildung 4: Die Partialsummen der geometrischen Reihe für $q = 1/2$ füllen schrittweise das Intervall von 0 bis 2 auf und konvergieren gegen 2.